

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA  
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Departamento de Física

---

# Estudio de la interacción de mareas en sistemas planetarios

---

Tesis Doctoral

Lic. Santiago Luna<sup>1,3</sup>

Director:

Dr. Mario Melita<sup>3,4</sup>

Co-director:

Dr. Hugo Navone<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, UNR.

<sup>2</sup> Instituto de Física de Rosario (IFIR), CONICET – UNR.

<sup>3</sup> Instituto de Astronomía y Física del Espacio (IAFE), CONICET – UBA.

<sup>4</sup> Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas, UNLP.



Tesis presentada en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR)  
en cumplimiento de los requisitos para optar al título de **Doctor en Física**.

Defendida el 29 de mayo de 2020.



*A Yami, el amor de mi vida, quien supo apoyarme y acompañarme en este largo y muchas veces difícil camino de mi formación científica y a toda su familia, quienes me aceptaron como un integrante más.*

*A mis padres, quienes también me acompañaron en momentos muy importantes de mi vida y me apoyaron cuando tomé la decisión de cambiar de carrera para dedicarme a lo que verdaderamente me apasiona, la Física y la Astronomía.*



*Uno nunca sabe por quién puede vivir,  
uno nunca sabe por quién puede morir,  
uno busca en el cielo espejos nuevos.*

*Cristal tan frágil como mi destino,  
cristal tan duro como este camino.*

*Cristal - Callejeros.*

*Girando y girando un día me encontré  
viajando hacia Transilvania  
y en una pesadilla llegué a la conclusión  
había que hacerlo distinto.*

*Y la segunda marea me mueve la tierra  
y el hombre que mira los trenes se ríe de nosotros.*

*Arañas y ratas - Riff.*



## Resumen

En los últimos años se han descubierto muchos planetas presumiblemente rocosos, con masas entre 1 y  $10 M_{\oplus}$ , y que describen órbitas muy cercanas a su estrella anfitriona, esperándose, por lo tanto, que la interacción de mareas sea muy fuerte en estos sistemas. Teniendo en cuenta esto, el objetivo principal de este trabajo de tesis ha sido la construcción de un formalismo teórico, y su posterior expresión computacional, para posibilitar el estudio de la evolución orbital y rotacional de sistemas binarios formados por un planeta y su estrella anfitriona, considerando los efectos de disipación introducidos por los términos seculares de los potenciales perturbadores de mareas. En el desarrollo de este formalismo se incluye también el efecto de los términos seculares asociados con la triaxialidad de uno de los cuerpos intervinientes, que se expresa en la dinámica orbital por los términos asociados al coeficiente  $J_2$ , y en la dinámica rotacional, por aquellos relacionados con el coeficiente  $C_{22}$  que mide la desviación del cuerpo respecto de uno con simetría rotacional. Ambos coeficientes caracterizan la distribución inhomogénea y permanente de masa en el interior de uno de los cuerpos. A partir de este formalismo es posible estudiar, interpretar y caracterizar el comportamiento dinámico de sistemas planetarios de diversa naturaleza respecto de las principales propiedades que impone la interacción de mareas en la evolución orbital y rotacional de los mismos: sincronización, expansión o decaimiento orbital, circularización y planarización.

El proceso de construcción del formalismo propuesto en esta tesis está basado en la formulación que realizan [Boué y Efroimsky \(2019\)](#) a partir de la teoría de Darwin-Kaula y desarrollos posteriores, que da la evolución de los elementos orbitales de un sistema planetario debido a la interacción de mareas. La mencionada formulación incluye, además, a las ecuaciones diferenciales que describen la evolución rotacional a lo largo del eje de máxima inercia, explicitando las aceleraciones angulares causadas por el torque de mareas. En este trabajo de tesis se amplía el desarrollo teórico antes citado incluyendo en la formulación el efecto de la triaxialidad de los cuerpos interactuantes a través del potencial perturbador y se incorporan modelos reológicos más realistas para el tipo de sistemas estudiados, en comparación con otros estudios publicados recientemente ([Veras \*et al.\*, 2019](#)). Todo esto teniendo en cuenta que la combinación del torque de mareas y de aquél causado por la triaxialidad, junto con el comportamiento reológico de los cuerpos interactuantes, abre la posibilidad de captura en resonancias espín-órbita.

El formalismo teórico desarrollado permite la construcción de modelos computacionales de sistemas planetarios específicos y el estudio dinámico de los mismos a partir de la implementación de diversos experimentos numéricos. En particular, en este trabajo de tesis, se estudió la dinámica rotacional de Mercurio y la evolución orbital del sistema Marte-Fobos a los efectos de validar analítica y numéricamente el desarrollo teórico y computacional propuesto, y se estudió el sistema Kepler-21, recientemente descubierto, del cual no se conocen aún estudios de esta naturaleza. Los resultados obtenidos en Kepler-21 indican que —al menos para los parámetros y las condiciones iniciales exploradas, y el intervalo temporal de las simulaciones numéricas realizadas— el tiempo de sincronización depende fuertemente de los parámetros reológicos. Además, se obtuvo que, para ciertas combinaciones de parámetros reológicos y dinámicos, el estado rotacional final del planeta puede ser levemente asincrónico. Se observó que tanto la evolución rotacional como la orbital pueden describirse completamente en términos

de la evolución secular debido a la interacción de las mareas únicamente, al menos cualitativamente, incluida la estimación de las escalas de tiempo características de la evolución orbital. También, se evaluó la posibilidad de detectar los efectos de la interacción de mareas analizando su influencia en la variación temporal del periodo orbital y se encontró que dicha variación es actualmente indetectable.

Finalmente, es importante destacar que tanto el formalismo desarrollado como su aplicación en el análisis del sistema Kepler-21 constituyen un aporte original en el estudio de la evolución dinámica de sistemas planetarios debido a la interacción de mareas y, por supuesto, también contribuye a promover el desarrollo de nuevas líneas de investigación en esta temática.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Consideraciones generales . . . . .	1
1.2. Estado del arte . . . . .	4
1.3. Motivación, objetivos y alcances . . . . .	6
1.4. Contribuciones y aportes originales de este trabajo de tesis . . . . .	7
<b>2. Construcción de nuestro formalismo y obtención de las ecuaciones de movimiento</b>	<b>9</b>
2.1. Evolución orbital y rotacional . . . . .	9
2.1.1. Interacción gravitatoria . . . . .	10
2.1.2. El problema de los dos cuerpos . . . . .	12
2.1.3. Movimiento orbital perturbado y ecuaciones planetarias de Lagrange . . . . .	21
2.1.4. Dinámica rotacional de cuerpos celestes . . . . .	27
2.2. Expansión del potencial perturbador y desarrollo del formalismo de Darwin-Kaula . . . . .	32
2.2.1. Potencial perturbador . . . . .	32
2.2.2. Perturbaciones planetarias . . . . .	35
2.2.3. Perturbaciones mareales . . . . .	36
2.2.4. Perturbaciones debidas a una distribución inhomogénea y permanente de masa . . . . .	41
2.3. Estudio de la evolución dinámica considerando la disipación en ambos cuerpos . . . . .	45
2.4. Construcción del formalismo incorporando interacción de mareas y triaxialidad. Deducción de las ecuaciones de movimiento . . . . .	47
2.5. Construcción del modelo dinámico . . . . .	61
<b>3. Deformación de cuerpos celestes y modelos reológicos</b>	<b>73</b>
3.1. Mareas dinámicas . . . . .	73
3.2. Números de Love complejos . . . . .	76
3.3. Descripción matemática de la deformación de cuerpos celestes . . . . .	79
3.4. Modelos reológicos . . . . .	83
<b>4. Validación del modelo desarrollado</b>	<b>88</b>
4.1. Validaciones de carácter analítico . . . . .	88
4.1.1. Evolución rotacional, torque secular de mareas y torque triaxial . . . . .	89
4.1.2. Evolución orbital y tasa de variación temporal del semieje mayor . . . . .	89
4.2. Validaciones de carácter numérico . . . . .	90
4.2.1. Evolución rotacional de Mercurio . . . . .	90

4.2.2. Evolución orbital de Fobos . . . . .	92
4.3. Síntesis de los resultados obtenidos . . . . .	93
<b>5. Estudio de la dinámica orbital y rotacional del sistema Kepler-21</b>	<b>95</b>
5.1. Discusión preliminar . . . . .	95
5.1.1. El sistema Kepler-21 . . . . .	95
5.1.2. Modelo adoptado . . . . .	96
5.1.3. Reología de los componentes . . . . .	96
5.2. Caracterización numérica y semianalítica de la evolución dinámica del sistema Kepler-21 . . . . .	100
5.2.1. Resultados de las simulaciones computacionales . . . . .	101
5.2.2. ¿Es posible detectar los efectos de marea? . . . . .	106
<b>6. Discusión final y conclusiones</b>	<b>111</b>

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Consideraciones generales

El estudio de la interacción de mareas es una temática de investigación que se inicia con la explicación de las mareas oceánicas dada por Newton en sus *Principia* debida a la atracción gravitatoria por parte de la Luna y el Sol. Desde entonces, este campo de trabajo ha estado en constante crecimiento nutriéndose de valiosos aportes como los de George Darwin —hijo del famoso naturalista Charles Darwin— hacia fines del siglo XIX, aquellos de A. E. H. Love en las primeras décadas del siglo XX, los de William Kaula, en la década de 1960, y los establecidos por Michael Efroimsky y colaboradores en esta última década, sólo por nombrar algunos de los muchos científicos que a lo largo de toda su historia han contribuido con sus trabajos al crecimiento de esta rama de la Física.

Intuitivamente, la palabra mareas está relacionada a los mares y océanos, esto es, al cambio periódico y alternativo de nivel de los mismos debido a la antes mencionada atracción gravitatoria. Pero, más aún, las mareas están relacionadas con el tiempo, dada la mencionada periodicidad de este fenómeno. Por dar algunos ejemplos, el término para mareas en inglés es *tide*, el cual a su vez proviene del término *tid* del antiguo idioma sajón y que significa tiempo. En alemán, el término correspondiente es *Gezeiten*, íntimamente relacionado con la palabra *Zeit*, que también significa tiempo.

Sin embargo, la actual teoría de mareas iniciada por G. Darwin tiene en cuenta no solo lo anterior sino también la deformación tanto de la parte fluida como de la estructura sólida de un cuerpo celeste. Debido a que los niveles medidos de mares y océanos resultaba mayor que los predichos considerando solamente la deformación de la parte fluida de la Tierra, resultó necesario aventurarse en la hipótesis de que nuestro planeta se comporta como un cuerpo sólido capaz de deformarse. Por lo tanto, el estudio de la interacción de mareas involucra conocimientos tanto de Mecánica Celeste como de Mecánica de los Medios Continuos y de Geofísica, tal como se verá más adelante. Por tal motivo, podría decirse que este campo problemático de estudio, junto con los aportes de la Geodesia Celeste, simultáneamente dan inicio y son partes fundamentales de esta nueva rama de las ciencias que podría denominarse *Astrogeofísica*.

No sería erróneo, por tanto, afirmar que el estudio teórico de la interacción de mareas y su influencia en la dinámica rotacional y orbital de sistemas planetarios, tales como nuestro Sistema Solar, los sistemas formados por un planeta y sus satélites e incluso sistemas exoplanetarios, ha recibido atención a lo largo de toda su historia, desde aquellos primeros trabajos de [Darwin](#) (1879, 1880) hasta los más recientes realizados

por diversos grupos en todo el mundo. En este sentido, puede observarse que el campo de aplicación de la teoría de mareas se ha ampliado, abarcando desde cuerpos del Sistema Solar hasta las recientemente descubiertas “supertierras”, que no son otra cosa que planetas presumiblemente rocosos con masas entre 1 y 10 veces la masa de nuestro planeta Tierra.

Nuestro Sistema Solar ofrece muchas evidencias de la relevancia que tiene el efecto de mareas en la dinámica rotacional y orbital de los cuerpos celestes que lo componen. Por dar algunos ejemplos, todos los satélites naturales se encuentran en órbitas sincrónicas, esto es, su periodo de rotación es igual a su periodo orbital. Lo mismo ocurre con los asteroides binarios. Entre los planetas, en cambio, se destaca el caso de Mercurio, el cual rota tres veces sobre su propio eje al mismo tiempo que completa dos revoluciones alrededor del Sol. En cuanto a la dinámica orbital, las consecuencias son igualmente interesantes. Los dos ejemplos más sobresalientes son los sistemas formados por la Tierra y la Luna y el formado por Marte y Fobos. En el primero, la Luna se va alejando de la Tierra a medida que la última va disminuyendo su velocidad de rotación. En el segundo, en cambio, ocurre lo opuesto, es decir, Fobos lentamente se va acercando a Marte disminuyendo paulatinamente su periodo orbital. Todos los fenómenos antes mencionados encuentran su explicación en la interacción de mareas.

El problema tratado puede presentarse en términos generales de la siguiente manera. Considérense dos cuerpos que se mueven bajo la influencia de las fuerzas de atracción gravitatoria que ambos se ejercen mutuamente. Uno de ellos, de masa  $m_p$ , es una esfera homogénea de radio  $R$ , al cual se lo llama primario, mientras que el otro se lo considera como una masa puntual de magnitud  $m_s$ , llamado secundario. Entonces, la fuerza con la que el secundario atrae al primario causa que este último se deforme. Esta deformación tiene como consecuencia la modificación del campo gravitatorio del primario, lo cual, a su vez, perturba el movimiento del secundario al mismo tiempo que afecta la velocidad rotación de aquél. Más adelante, se abordará nuevamente esta temática con todo el rigor matemático que la misma requiere a los efectos de obtener una descripción cuantitativa de los problemas a explorar. En esta sección simplemente se hará una descripción de carácter cualitativo.

Continuando con el esquema general planteado en el párrafo anterior, considérese también que el primario rota con velocidad angular  $\dot{\theta}$  alrededor del eje correspondiente al máximo momento de inercia  $C$ , mientras que el secundario describe una órbita circular de radio  $a$  y cuya frecuencia orbital es  $n$ . La energía total del sistema  $E$  es la suma de la energía cinética de rotación del primario  $\frac{1}{2}C\dot{\theta}^2$  y la energía orbital del sistema  $-Gm_p m_s/(2a)$  que, a su vez, es igual a la suma de la energía cinética y potencial del secundario. Matemáticamente expresado resulta:

$$E = \frac{1}{2}C\dot{\theta}^2 - G\frac{m_p m_s}{2a}$$

donde  $G$  es la constante de gravitación universal. Luego, la derivada temporal de la Energía es:

$$\dot{E} = C\dot{\theta}\ddot{\theta} + G\frac{m_p m_s}{2a^2}\dot{a} \quad (1.1)$$

En virtud de la tercera ley de Kepler, cuya deducción se expondrá más adelante, se tiene  $G(m_p + m_s) = n^2 a^3$ . Reemplazando en la ecuación anterior se obtiene:

$$\dot{E} = C\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{1}{2}\frac{m_p m_s}{m_p + m_s}n^2 a \dot{a} \quad (1.2)$$

Es importante destacar que en la evolución dinámica del sistema hay disipación de energía porque, tal como se verá más adelante, los materiales que componen los cuerpos celestes, al igual que todos los materiales reales, no son perfectamente elásticos sino que poseen cierto grado de viscosidad, es decir, existe en ellos rozamiento interno que se manifiesta en forma de calor. Sin embargo, el momento angular total del sistema ( $L$ ) se conserva, dado que no se considera la existencia de torques externos al sistema. Esto se expresa matemáticamente mediante:

$$\dot{L} = \frac{d}{dt} \left( C \dot{\theta} + \frac{m_p m_s}{m_p + m_s} n a^2 \right) = 0, \quad (1.3)$$

de donde resulta que:

$$C \ddot{\theta} = -\frac{1}{2} \frac{m_p m_s}{m_p + m_s} n a \dot{a}$$

sustituyendo esta última expresión en la Ec. (1.2) se llega a:

$$\dot{E} = -\frac{1}{2} \frac{m_p m_s}{m_p + m_s} n a \dot{a} (\dot{\theta} - n) \quad (1.4)$$

Dado que, por lo indicado anteriormente,  $\dot{E} < 0$  se tiene entonces como consecuencia que:

$$\text{sgn}(\dot{a}) = -\text{sgn}(\ddot{\theta}) = \text{sgn}(\dot{\theta} - n) \quad (1.5)$$

Por lo tanto, si  $\dot{\theta} > n$  entonces el radio de la órbita tenderá a crecer mientras que la velocidad de rotación del primario decrece, como ocurre con el ya mencionado caso del sistema Tierra-Luna. En cambio, si es  $\dot{\theta} < n$ , entonces se tiene la situación inversa, esto es, el radio de la órbita decrece mientras que la velocidad de rotación se incrementa, tal como sucede en el caso del sistema Marte-Fobos (Luna *et al.*, 2018a).

Si bien la descripción aquí presentada resulta insuficiente para tratar los problemas de la evolución rotacional y orbital de sistemas planetarios, resulta muy útil como idea intuitiva para interpretar los resultados que se obtienen a partir de simulaciones computacionales.

Como se verá, la formulación completa de la interacción de mareas es mucho más compleja, pero puede resumirse en dos aspectos fundamentales. Por un lado, la antes mencionada deformación del primario y la consecuente modificación de su campo gravitatorio requiere de la expansión del correspondiente potencial gravitatorio en función de un conjunto conveniente de variables, las cuales son los llamados elementos orbitales. Este desarrollo fue llevado a cabo de manera algo simplificada por Darwin (1879) y posteriormente Kaula (1961) dio la expresión completa de dicha expansión. Por otro lado, resultó necesario incluir la reología de los materiales que componen los cuerpos celestes para poder modelar de alguna forma la disipación que ocurre dentro de ellos al deformarse, es decir, para modelar la respuesta de aquellos ante las tensiones aplicadas que, por supuesto, son de origen gravitatorio. En este sentido cabe destacar el trabajo de Efroimsky (2012) en el cual expone el llamado formalismo de los números de Love complejos, que permite la inclusión de cualquier reología lineal y, por tal motivo, fue uno de los que se tomaron como base para llevar adelante el trabajo de investigación que se presenta en esta tesis.

Además de los fenómenos observados en nuestro Sistema Solar que fueron indicados anteriormente, el descubrimiento de planetas que serían similares a la Tierra en tamaño

y composición alrededor de estrellas distintas al Sol describiendo órbitas muy cercanas a las mismas, donde se espera que la interacción de mareas sea muy intensa, abre la posibilidad de aplicar toda la maquinaria teórica desarrollada para estudiar la evolución dinámica de dichos exoplanetas. Las conclusiones extraídas de esas investigaciones puede resultar útiles en otros aspectos como la evaluación de las condiciones que hacen posible la vida en esos nuevos mundos.

Con respecto a lo mencionado en el párrafo anterior, la sonda Kepler fue diseñada para descubrir planetas similares a la tierra en tamaño y masa que estén dentro de la zona de habitabilidad ([Borucki \*et al.\*, 2010](#); [Kopparapu \*et al.\*, 2013a,b](#)). La misma tuvo un rol central en el descubrimiento de planetas con masas entre 1 y 10 veces la masa de la Tierra y con radios entre 2 y 3 veces el de nuestro planeta, lo que indica que podrían ser de composición rocosa ([Valencia \*et al.\*, 2006, 2007a,b](#)). Gracias a esta misión se han descubierto más de 2700 exoplanetas (ya confirmados) en los nueve años que estuvo operativa (desde 2009 hasta 2018), lo que conforma un amplio espectro de sistemas susceptibles de ser estudiados con el formalismo desarrollado en este trabajo.

## 1.2. Estado del arte

Tanto la expansión de Darwin-Kaula del potencial gravitatorio como el formalismo de los números de Love complejos resultan un enorme salto cualitativo en la descripción matemática de los efectos de la interacción de mareas. Aún así, constantemente se nutre de nuevos aportes que le brindan mayor generalidad, como por ejemplo el cálculo preciso de la potencia disipada por la mencionada interacción ([Efroimsky y Makarov, 2014](#)), la inclusión del efecto de las libraciones en longitud, tanto en la evolución dinámica como en la tasa de energía disipada ([Frouard y Efroimsky, 2017](#)) y la reciente extensión del mencionado formalismo al caso en que se considera la disipación en ambos cuerpos de un sistema binario ([Boué y Efroimsky, 2019](#)), el cual corrige varios errores del trabajo anterior de [Kaula \(1964\)](#).

Sin embargo, el marco teórico general del formalismo de Darwin-Kaula adolece de, al menos, tres limitaciones importantes. La primera de ellas es que, si bien [Boué y Efroimsky \(2019\)](#) desarrollaron un formalismo que permite incluir la disipación por efecto de mareas en los dos componentes de un sistema binario —y, por lo tanto se tiene en cuenta la forma de ambos—, el potencial perturbador que define el estado de tensiones y que, por tanto, induce la deformación en cada uno de los cuerpos por parte del otro, aún corresponde a aquél generado por una masa puntual. En otras palabras, la forma de cada integrante del sistema binario se tiene en cuenta solamente al momento de evaluar su deformación producida por el otro como si toda la masa de este último estuviese concentrada en su centro de masa. Para subsanar este problema [Mathis y Le Poncin-Lafitte \(2009\)](#) desarrollaron un formalismo que considera la deformación mareal teniendo en cuenta la extensión de ambos, los cuales están caracterizados por los coeficientes de sus correspondientes campos gravitatorios. En dicho formalismo, también se consideran los números de Love complejos y se deducen las ecuaciones de movimiento que, además, tienen la ventaja de estar escritas en un sistema de referencia inercial y, por lo tanto, su interpretación es directa. Sin embargo, el mismo se presenta en términos muy generales y, hasta donde llega nuestro conocimiento, no se ha aplicado a sistemas en concreto debido a las dificultades teóricas y computacionales implícitas en el desarrollo de modelos específicos a partir del formalismo mencionado. Los autores del trabajo citado simplemente evalúan la importancia que puede tener en ciertos casos

la consideración de la extensión de cada uno de los cuerpos en la dinámica orbital y rotacional. Como comentario adicional, la exposición del desarrollo de dicho formalismo se realiza en términos casi puramente matemáticos y por momentos se pierde de vista toda la Física detrás de la interacción de mareas.

La segunda limitación tiene que ver con la descripción reológica de los materiales que componen los cuerpos celestes. Tal como se indicó anteriormente, el formalismo de Darwin-Kaula permite la inclusión de cualquier reología lineal pero dentro de ciertos límites. En este sentido, dicha teoría es inaplicable a cuerpos totalmente fluidos o con una envoltura fluida —como es el caso de Júpiter y sus análogos extrasolares, los llamados “Júpiteres calientes”— dado que para viscosidades demasiado bajas empiezan a ganar importancia efectos hidrodinámicos que pueden generar una disipación tan importante como la producida por la interacción de mareas (Guenel *et al.*, 2014). En los casos en que pueda despreciarse la disipación de la envoltura fluida de un planeta, se puede estudiar su dinámica rotacional y orbital teniendo en cuenta la disipación dentro de su núcleo sólido considerando la atenuación de la amplitud de la marea producida en el mismo debido a la presión ejercida por dicha envoltura (Remus *et al.*, 2012a,b, 2015). Cabe destacar que el estudio de la disipación en cuerpos fluidos es aún actualmente un activo campo de investigación teórica (André *et al.*, 2017, 2019; Auclair-Desrotour *et al.*, 2019). Aún así, es posible describir la reología de cuerpos fluidos como las estrellas considerándolas compuestas de un material viscoso, pero no en el sentido literal de esta última palabra sino que, en realidad, se asume que la reología de la estrella está dominada por la viscosidad, siempre que la rigidez se encuentre por debajo de cierto límite (Efroimsky, 2015).

Finalmente, la tercera limitación a mencionar tiene que ver específicamente con el formalismo desarrollado por Boué y Efroimsky (2019). En el mismo, los autores consideran sistemas de referencia solidarios a cada uno de los cuerpos que, por supuesto, son sistemas no inerciales. En virtud de la libertad de gauge implícita en las ecuaciones planetarias de Lagrange (Efroimsky y Goldreich, 2004; Efroimsky, 2005a; Kopeikin *et al.*, 2011), Boué y Efroimsky (2019) consideran una forma particular de la función de gauge que, si bien tiene la ventaja de simplificar las ecuaciones de movimiento, también tiene la desventaja de que los elementos orbitales, cuya variación temporal está descrita por la ecuaciones planetarias de Lagrange, no tienen una interpretación directa tal como la tienen los elementos orbitales osculantes. El motivo de esta deficiencia se va a explicar en detalle durante el desarrollo del Capítulo 2. Sin embargo, en los casos que se van a abordar en esta tesis, la diferencia entre los primeros y los últimos es no es significativa, tal como se ha podido verificar en las simulaciones computacionales implementadas en este trabajo; no obstante, por supuesto, esto no quiere decir que no puedan ser importantes para otros sistemas.

De forma paralela al desarrollo del formalismo de Darwin-Kaula, se han construido otras formulaciones alternativas de la Teoría de Mareas. Se van a mencionar dos ejemplos importantes. Por un lado, se tiene el formalismo desarrollado por Correia *et al.* (2014) y Boué *et al.* (2016). Por otro lado, se destaca el formalismo desarrollado por Ferraz-Mello (2013, 2015) y Folonier y Ferraz-Mello (2017). En el primer ejemplo, la deformación debida a la interacción de mareas se describe mediante ecuaciones diferenciales que dan la evolución temporal de los coeficientes del campo gravitatorio del cuerpo celeste considerado. Dichas ecuaciones cumplen el rol de ecuaciones constitutivas que cierran el sistema de ecuaciones de movimiento y, de esta forma, es posible describir tanto la dinámica orbital como la rotacional. La mayor ventaja de este forma-



lismo es que las posiciones de los componentes del sistema —que puede tener dos o más cuerpos— están parametrizadas por variables cartesianas, las cuales no poseen singularidades. En consecuencia, dicho formalismo es válido para cualquier excentricidad e inclinación u oblicuidad. El segundo ejemplo, conocido como Teoría de la Reptación Newtoniana, tiene la característica de ser un enfoque similar al anterior, en el cual se hace uso de una ecuación constitutiva para describir el cambio de nivel del cuerpo deformado por las mareas y, por lo tanto, tiene la misma ventaja que el anterior.

Resulta importante mencionar que ambas formulaciones tienen la desventaja de que es necesario imponer a priori una ecuación particular que describa la deformación de los cuerpos celestes para luego obtener las ecuaciones de movimiento. En cambio, en el formalismo de Darwin-Kaula las ecuaciones de movimiento son independientes de la forma particular de la ecuación constitutiva, siempre y cuando esta sea lineal. Es por este motivo que anteriormente se indicó que el formalismo de Darwin-Kaula permite la inclusión de cualquier reología lineal y, por lo tanto, es más general en este sentido. De aquí surge el interés de tomar como base para el desarrollo de este trabajo de investigación a este formalismo en particular en lugar de los otros dos.

### 1.3. Motivación, objetivos y alcances

En el contexto de investigación actual en esta temática y a partir de los marcos teóricos mencionados, tal como se expuso anteriormente, en este trabajo de tesis se propone construir un formalismo teórico que luego pueda expresarse en un modelo computacional que permita estudiar la evolución dinámica de sistemas planetarios, en general, y de las recientemente descubiertas exotierras, en particular, a los efectos de poder describirla y caracterizarla en función de las principales consecuencias evolutivas que impone la interacción de mareas sobre la dinámica de estos sistemas, a saber: la excitación o decaimiento orbital, la circularización, la planarización y la sincronización.

A fin de llevar a cabo el estudio propuesto se construirá un formalismo teórico basado en la teoría de Darwin-Kaula y desarrollos posteriores, tal como se indicó anteriormente, que tome en cuenta la interacción de mareas, el comportamiento reológico de los cuerpos intervinientes y, también, su triaxialidad. Este formalismo nos permitirá modelar matemática y computacionalmente diversos sistemas planetarios que se ajusten a las condiciones de desarrollo impuestas en la construcción del mencionado formalismo. Por supuesto, también se explicarán claramente sus ventajas y limitaciones.

Este primer paso es un desafío en sí mismo, dado que dicho marco teórico abarca desde las ecuaciones de movimiento de Newton, de las cuales se obtienen las Ecuaciones Planetarias de Lagrange, pasando por las de Euler —que permiten obtener las correspondientes ecuaciones de movimiento rotacional— y por el formalismo de Darwin-Kaula, para la expansión de los potenciales perturbadores, hasta llegar a la descripción e inclusión de los modelos reológicos que describen la respuesta de un cuerpo celeste ante las fuerzas que lo deforman. De esta manera se logra la construcción de una teoría autoconsistente que permite describir o, al menos, dar una noción de la interrelación entre la evolución dinámica de estrellas, planetas y satélites, y el comportamiento de sus propiedades internas.

Posteriormente, toda la maquinaria teórica desarrollada en la ya mencionada primera parte se pondrá en funcionamiento para estudiar, en primer lugar, la dinámica rotacional de Mercurio y la evolución orbital del sistema Marte-Fobos, a modo de validación, para luego aplicarla a otros casos aún no estudiados con el fin de llevar a cabo



la caracterización ya mencionada.

En tal sentido, se ha elegido el sistema Kepler-21 (López-Morales *et al.*, 2016) dado que, por un lado, puede inferirse que es de composición rocosa y, por otro lado, sus parámetros físicos y orbitales están bien determinados o, al menos, bien restringidos.

El paso siguiente consistirá en analizar y discutir los resultados obtenidos en el contexto de otros estudios ya publicados en este campo de trabajo, elaborar las conclusiones pertinentes y trazar futuros rumbos de acción en la investigación sobre estas temáticas.

## 1.4. Contribuciones y aportes originales de este trabajo de tesis

A continuación se presentan los principales aportes de este trabajo de tesis al campo de investigación en el cual se inscribe, y se mencionan las secciones en donde estas contribuciones se desarrollan en profundidad.

- En el Capítulo 2 se presenta la construcción de un formalismo basado en la teoría de Darwin-Kaula para el estudio de sistemas binarios que, además de las mareas que cada componente induce en el otro, incluye también la triaxialidad de uno de ellos, expresada mediante los coeficientes  $J_2$  y  $C_{22}$ . El formalismo desarrollado permite, por un lado, evaluar el impacto de los términos seculares relacionados con el primero de los coeficientes en la evolución orbital. Por otro lado, incluye los términos periódicos asociados a  $C_{22}$  en la ecuación de movimiento rotacional del cuerpo correspondiente, que son precisamente los términos del torque triaxial. Este torque, junto con el de mareas dominan la dinámica rotacional de planetas y satélites, a tal punto que su interrelación determina la captura o pasaje en resonancias espín-órbita.
- También en el Capítulo 2, el formalismo construido se desarrolló para abordar problemas en los que las excentricidades y las inclinaciones son bajas. Se logró obtener un conjunto de ecuaciones de movimiento que tienen la característica de permanecer regulares cuando la excentricidad y las inclinaciones tienden a cero, por lo que constituyen una elección adecuada para su implementación en un modelo computacional.
- Al estar basado en la teoría de Darwin-Kaula, el formalismo aquí desarrollado permite incluir cualquier reología lineal, aspecto que resulta sumamente útil para construir modelos teóricos y computacionales de sistemas binarios en los que sus componentes pueden ser de naturaleza diversa. Esto se expone con detalle en el Capítulo 3.
- También se obtuvo la expresión computacional del formalismo desarrollado para bajas excentricidades e inclinaciones, que puede ser utilizado para estudiar la dinámica orbital y rotacional de diversos sistemas binarios.
- En el Capítulo 4 se explica cómo se validó el código computacional de forma analítica y numérica abordando el estudio de la dinámica rotacional de Mercurio y la evolución orbital del sistema Marte-Fobos.

- Por último, el formalismo desarrollado se aplicó al modelado de la dinámica orbital y rotacional del sistema Kepler-21 el cual, hasta donde llega nuestro conocimiento, no ha sido estudiado previamente con las herramientas teóricas y computacionales aquí construidas. Los detalles de la construcción del modelo correspondiente y los resultados obtenidos se exponen en el Capítulo 5.

Finalmente, cabe mencionar que los contenidos principales de esta tesis se basan en los siguientes trabajos publicados e inéditos:

- Luna, S. H., Melita, M. D. y Navone, H. D. (2016). “Estudio de la interacción de mareas en sistemas exoplanetarios observados: Estimación de las probabilidades de captura en resonancias espín-órbita”. *Boletín de la Asociación Argentina de Astronomía*. Vol. 58, pp. 310-312. URL: <http://articles.adsabs.harvard.edu/pdf/2016BAAA...58..310L>.
- Luna, S. H. Melita, M. D. y Navone, H. D. (2018a). “Estudio de la evolución orbital de Fobos debido a la interacción de mareas y su relación con la propiedades físicas de Marte”. *Boletín de la Asociación Argentina de Astronomía*. Vol. 60, pp. 265-267. URL: <http://articles.adsabs.harvard.edu/pdf/2018BAAA...60..265L>.
- Luna, S. H., Melita, M. D. y Navone, H. D. (2018b). “Origen y evolución orbital de Fobos: Exploración de una hipótesis de captura”. *Boletín de la Asociación Argentina de Astronomía*. Vol. 60, pp. 268-270. URL: <http://articles.adsabs.harvard.edu/pdf/2018BAAA...60..268L>
- Luna, S. H., Melita, M. D. y Navone, H. D. (2019). “Dynamical evolution of close-in super-earths tidally interacting with its host star near spin-orbit resonances. The case of Kepler-21 system”. arXiv:1907.10575, URL: <https://arxiv.org/abs/1907.10575>.

## Capítulo 2

# Construcción de nuestro formalismo y obtención de las ecuaciones de movimiento

En este capítulo se presenta, en primer lugar, la descripción matemática de los dos movimientos que describen los cuerpos celestes cuando interactúan gravitatoriamente: el movimiento de traslación a lo largo de órbitas, cuyos parámetros pueden ser constantes o no, y el movimiento de rotación. Este último abarca la variación de todos los parámetros que definen completamente el estado rotacional del cuerpo estudiado, esto es: su orientación, definida mediante los ángulos de Euler, y su velocidad de rotación, definida por los antes mencionados ángulos y por las velocidades de precesión, nutación y rotación propia. Todas estas cantidades serán definidas en las secciones siguientes.

En segundo lugar, se presenta el formalismo de Darwin-Kaula ([Efroimsky y Makarov, 2013](#)) que permite expandir los potenciales que perturban los movimientos antes mencionados. El origen de esas perturbaciones es variado, pero en este trabajo se van a considerar tres, a saber: aquellas debidas a la presencia de varios cuerpos, las mareas y las debidas a una distribución espacial inhomogénea y permanente de masa.

Seguidamente, se expone el formalismo desarrollado por [Boué y Efroimsky \(2019\)](#) —el cual está basado en el formalismo de Darwin-Kaula— que permite estudiar la evolución dinámica de un sistema binario considerando las perturbaciones originadas por el efecto de mareas en ambos cuerpos; esto es, debido al cambio en el tiempo de los respectivos potenciales gravitatorios de cada uno de ellos como consecuencia de la deformación causada por las fuerzas de atracción gravitatoria que los mismos se ejercen mutuamente.

Finalmente, a partir de los desarrollos teóricos anteriores, se presenta la construcción analítica del formalismo desarrollado en este trabajo que incluye, además de la interacción de mareas, la triaxialidad de uno de los cuerpos intervinientes. Es importante destacar que el formalismo que hemos construido puede extenderse fácilmente para contemplar la triaxialidad de ambas componentes de un sistema binario en estudio.

### 2.1. Evolución orbital y rotacional

El presente estudio se enmarca dentro del campo de la Física Clásica y, por tanto, el punto de partida serán las leyes de movimiento de Newton junto con la geometría euclídea y todas las herramientas provistas por el análisis matemático.

Quizá no sea necesario enunciar nuevamente las leyes de Newton, pero tal vez sí valga la pena mencionar la notoria relación entre aquellas y las leyes del movimiento planetario obtenidas por Johannes Kepler unos setenta años antes de la publicación de los *Principia* las cuales, a su vez, se basaron en las observaciones del astrónomo danés Tycho Brahe. En su conocida obra, Newton demostró que de las leyes de Kepler se deduce que la fuerza con la que se atraen los cuerpos celestes es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre sus centros, en virtud de su gravedad.

Muchos años más tarde, en 1710, Johann Bernoulli y Jakob Hermann presentaron de forma independiente la demostración del enunciado inverso: la ley de la fuerza inversamente proporcional a la distancia necesariamente implica órbitas cónicas. Posteriormente, D’Alembert y Clairaut simplificaron enormemente la demostración antes mencionada cambiando el enfoque del problema. En lugar de intentar encontrar la dependencia de la distancia con el tiempo, se concentraron en hallar la dependencia entre las correspondientes coordenadas polares del cuerpo orbitante. Si bien todo esto se va a explicar más detalladamente en las secciones subsiguientes, puesto que es necesario hacerlo para poder articular la construcción del formalismo desarrollado en esta tesis, cabe destacar que este último enfoque, puramente analítico, es el que predomina actualmente.

Dicha exposición resulta necesaria para presentar con claridad la construcción del formalismo desarrollado, así como para introducir los conceptos y las magnitudes físicas y astronómicas involucradas en el mismo. Este problema tiene solución analítica y constituye el punto de partida para el desarrollo de la teoría de perturbaciones.

También se expondrán brevemente los aspectos fundamentales de la dinámica del cuerpo rígido, válida tanto para el movimiento libre (en ausencia de torques externos) como para el perturbado, puesto que resulta imprescindible para el modelado de la dinámica rotacional de sistemas planetarios afectados por la interacción de mareas y por sus propias distribuciones no homogéneas y permanentes de masa.

A partir de todo lo expuesto, podremos establecer como punto de partida para la construcción de nuestro formalismo a los resultados obtenidos por [Boué y Efroimsky \(2019\)](#); extendiendo de esta manera, al incluir la triaxialidad, el campo de aplicaciones de la teoría de Darwin-Kaula.

### 2.1.1. Interacción gravitatoria

Sean dos masas puntuales  $m_1$  y  $m_2$  separadas una distancia  $r$ , entonces, el módulo de la fuerza  $F$  con la que dichas partículas se atraen es

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (2.1)$$

donde  $G$  es la constante de gravitación universal. En forma vectorial, dado un sistema de referencia inercial arbitrario, la fuerza  $\mathbf{F}_{1 \leftarrow 2}$  con la que la partícula de masa  $m_1$  atrae a la de masa  $m_2$  se escribe:

$$\mathbf{F}_{1 \leftarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|} \quad (2.2)$$

donde  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  son los vectores de posición de las masas puntuales  $m_1$  y  $m_2$ , respectivamente (Fig. 2.1). En virtud de la tercera ley de Newton se cumple:

$$\mathbf{F}_{1 \leftarrow 2} = -\mathbf{F}_{2 \leftarrow 1} \quad (2.3)$$

donde, por supuesto,  $\mathbf{F}_{2\leftarrow 1}$  es la fuerza con que la partícula de masa  $m_2$  atrae a la de masa  $m_1$ .

La fuerza de atracción gravitatoria, como se sabe, puede obtenerse como el gradiente de la energía potencial gravitatoria  $U$ , esto es:

$$\mathbf{F}_{1\leftarrow 2} = -\nabla_2 U \quad (2.4)$$

donde

$$U = -G \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|} \quad (2.5)$$

El subíndice 2 en el operador  $\nabla$  indica que se debe derivar respecto de las coordenadas de la partícula de masa  $m_2$ . No es difícil mostrar que  $U$  puede interpretarse como el trabajo necesario para mover la masa puntual  $m_2$  desde el infinito hasta la posición  $\mathbf{r}_2$ .

En virtud de la segunda ley de Newton del movimiento, se tiene:

$$\mathbf{F}_{1\leftarrow 2} = m_2 \mathbf{a}_2 \quad (2.6)$$

En consecuencia

$$\mathbf{a}_2 = -G \frac{m_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|} \quad (2.7)$$

y, en analogía con la Ec. (2.4),

$$\mathbf{a}_2 = -\nabla_2 \left( \frac{U}{m_2} \right) = \nabla_2 V_1 \quad (2.8)$$

donde

$$V_1 = -G \frac{m_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|} \quad (2.9)$$

El campo vectorial  $\mathbf{a}_2$ , definido por la Ec. (2.7) se conoce como *campo gravitatorio*, es decir, da la aceleración que se impone a una partícula situada en el punto  $\mathbf{r}_2$  debido a la fuerza de atracción gravitatoria ejercida por la partícula de masa  $m_1$ . Además,  $\mathbf{a}_2$  puede obtenerse como el gradiente del campo escalar  $V_1$ , definido por la Ec. (2.9), tal como lo indica la Ec. (2.8).  $V_1$ , por su parte, se conoce como el *potencial* generado por la partícula de masa  $m_1$ , el cual, como puede verse en la Ec. (2.9) sólo depende de la distancia entre las partículas. Lo mismo ocurre con la fuerza y además, según la Ec. (2.2), la misma yace sobre la recta que une dichas partículas. Este tipo de fuerzas se conocen como *fuerzas centrales*.

De forma análoga, la fuerza con la que la partícula de masa  $m_2$  atrae a la de masa  $m_1$ ,  $\mathbf{F}_{2\leftarrow 1}$ , también se puede obtener como el gradiente de la energía potencial gravitatoria  $U$ :

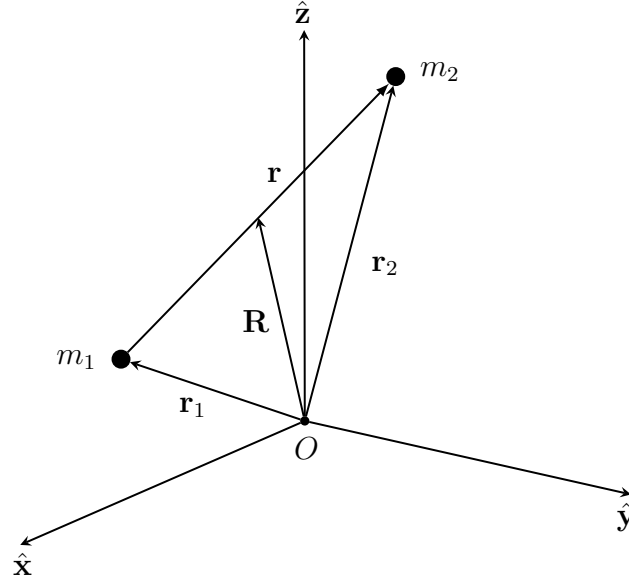
$$\mathbf{F}_{2\leftarrow 1} = -\nabla_1 U \quad (2.10)$$

donde  $\nabla_1$  indica que se debe derivar respecto de las componentes de  $\mathbf{r}_1$ . Naturalmente,  $\mathbf{F}_{2\leftarrow 1}$  imprime una aceleración  $\mathbf{a}_1$  a la masa puntual  $m_1$ , que también está dada por la segunda ley de Newton:

$$\mathbf{F}_{2\leftarrow 1} = m_1 \mathbf{a}_1 \quad (2.11)$$

y, por lo tanto:

$$\mathbf{a}_1 = -G \frac{m_2}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|} \quad (2.12)$$



**Figura 2.1:** Vectores de posición de  $m_1$  y  $m_2$  y del centro de masa del sistema que forman.

El campo vectorial  $\mathbf{a}_1$  claramente es el campo gravitatorio de la partícula de masa  $m_2$ , el cual, también puede obtenerse como el gradiente del potencial generado por  $m_2$ :

$$\mathbf{a}_1 = -\nabla_1 \left( \frac{U}{m_1} \right) = -\nabla_1 V_2 \quad (2.13)$$

donde:

$$V_2 = -G \frac{m_2}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|}. \quad (2.14)$$

### 2.1.2. El problema de los dos cuerpos

Sea un sistema de referencia inercial arbitrario fijo en el punto  $O$  (Fig. 2.1) y sean dos masas puntuales  $m_1$  y  $m_2$ . Sean, además,  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  los radio vectores de  $m_1$  y  $m_2$ , respectivamente. Las ecuaciones de movimiento de  $m_1$  y  $m_2$  son:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -G \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|} \quad (2.15)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|} \quad (2.16)$$

en virtud de las Ecs. (2.2), (2.3), (2.6) y (2.11). Las Ecs. (2.15) y (2.16) forman un sistema de seis ecuaciones diferenciales de segundo orden, por lo tanto, es necesario determinar doce constantes para poder obtener una descripción completa del movimiento de los dos cuerpos.

Si se suman las Ecs. (2.15) y (2.16) se obtiene:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{0} \quad (2.17)$$

la cual puede integrarse inmediatamente para dar:

$$m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{A} \quad (2.18)$$

Integrando nuevamente, se obtiene:

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = \mathbf{A}t + \mathbf{B} \quad (2.19)$$

donde  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son vectores constantes que dependen de las condiciones iniciales. En virtud de la definición de la posición del centro de masa ( $\mathbf{R}$ ), se tiene:

$$(m_1 + m_2)\mathbf{R} = \mathbf{A}t + \mathbf{B}. \quad (2.20)$$

La Ec. (2.20) indica, entonces, que el centro de masa del sistema se mueve a velocidad constante —igual a  $\mathbf{A}/(m_1 + m_2)$ — describiendo una línea recta en el espacio. Como consecuencia de esto se tiene, en primer lugar, que se han encontrado seis de las doce constantes necesarias para resolver completamente el problema; y, en segundo lugar, pero no así menos importante, que la posición del centro de masa del sistema está bien definida para cualquier instante de tiempo y, por lo tanto, aquél puede tomarse como origen de un nuevo sistema de referencia inercial. En un sistema tal, vale:

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = \mathbf{0}. \quad (2.21)$$

Si las Ecs. (2.15) y (2.16) se reescriben de la siguiente manera:

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = G \frac{m_2}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|}, \quad (2.22)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = G \frac{m_1}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|} \quad (2.23)$$

entonces, puede usarse la Ec. (2.21) para eliminar  $\mathbf{r}_2$  de la Ec. (2.22) y  $\mathbf{r}_1$  de la Ec. (2.23), de lo cual resulta:

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -G(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3}, \quad (2.24)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -G(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3} \quad (2.25)$$

Como puede apreciarse, las ecuaciones de movimiento de las dos partículas resultaron desacopladas en el sistema de referencia cuyo origen coincide con el centro de masa del sistema. Por lo tanto, puede resolverse una cualquiera de las dos para obtener la posición de la partícula correspondiente y determinar la posición de la otra usando la Ec. (2.21). Esto deja ver claramente que ahora son necesarias seis condiciones iniciales para resolver el problema, es decir, las componentes iniciales de la posición y de la velocidad de uno de los cuerpos.

Ahora bien, en muchas aplicaciones de estos resultados y los subsiguientes, resulta conveniente describir el movimiento de un cuerpo respecto del otro. Supóngase que se desea encontrar la órbita de la partícula de masa  $m_2$  respecto de la de masa  $m_1$ . Entonces, al restar la Ec. (2.24) de la Ec. (2.25) se obtiene:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (2.26)$$

donde, de nuevo,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ ,  $r = \|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|$  y  $\mu = G(m_1 + m_2)$ . Tal como se mencionó anteriormente, la Ec. (2.26) admite solución analítica. El problema de hallar dicha solución se simplifica enormemente gracias dos constantes de movimiento: la conservación del momento angular orbital y de la energía total del sistema.

Si se multiplica vectorialmente por la izquierda la Ec. (2.26) por  $\mathbf{r}$ , se obtiene:

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} (\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = \mathbf{0}$$

En consecuencia,

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0}$$

o bien:

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (2.27)$$

Esto es,  $\mathbf{h}$ , así definido, es una constante del problema de los dos cuerpos y por lo tanto queda determinado si se conocen las componentes de la posición y de la velocidad de  $m_2$  en cualquier instante de tiempo. Como puede verse en la Ec. (2.27) no es otra cosa que el momento angular por unidad de masa.

El vector  $\mathbf{h}$  define entonces el plano de la órbita de la masa puntual  $m_2$ , cual es el plano que pasa por  $m_1$  y es perpendicular a  $\mathbf{h}$ . La orientación del plano orbital puede determinarse de la siguiente manera: Sea  $h = \|\mathbf{h}\|$ , entonces, en función de los ángulos  $\varnothing$  e  $i$  (Fig. 2.2), las componentes de  $\mathbf{h}$  son:

$$\begin{aligned} h_1 &= h \sin \varnothing \sin i \\ h_2 &= -h \cos \varnothing \sin i \\ h_3 &= h \cos i \end{aligned} \quad (2.28)$$

Luego,

$$\tan \varnothing = -\frac{h_1}{h_2}, \quad \cos i = \frac{h_3}{h} \quad (2.29)$$

Esto es, dadas las componentes de la posición y de la velocidad de  $m_2$  en un instante cualquiera, se pueden calcular las cantidades  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  y  $h$  con la Ec. (2.27) las cuales determinan  $\varnothing$  e  $i$  con las Ecs. (2.29); estos ángulos se conocen como *longitud del nodo ascendente* e *inclinación*, respectivamente.

Una vez determinada la orientación del plano de la órbita, es posible realizar una transformación de coordenadas, compuesta de dos rotaciones en el espacio, que permita tratar el problema en dicho plano; de esta forma se puede simplificar el análisis. Las dos rotaciones necesarias son: primero una rotación alrededor del eje  $z$ , un ángulo igual a  $\varnothing$ , dada por:

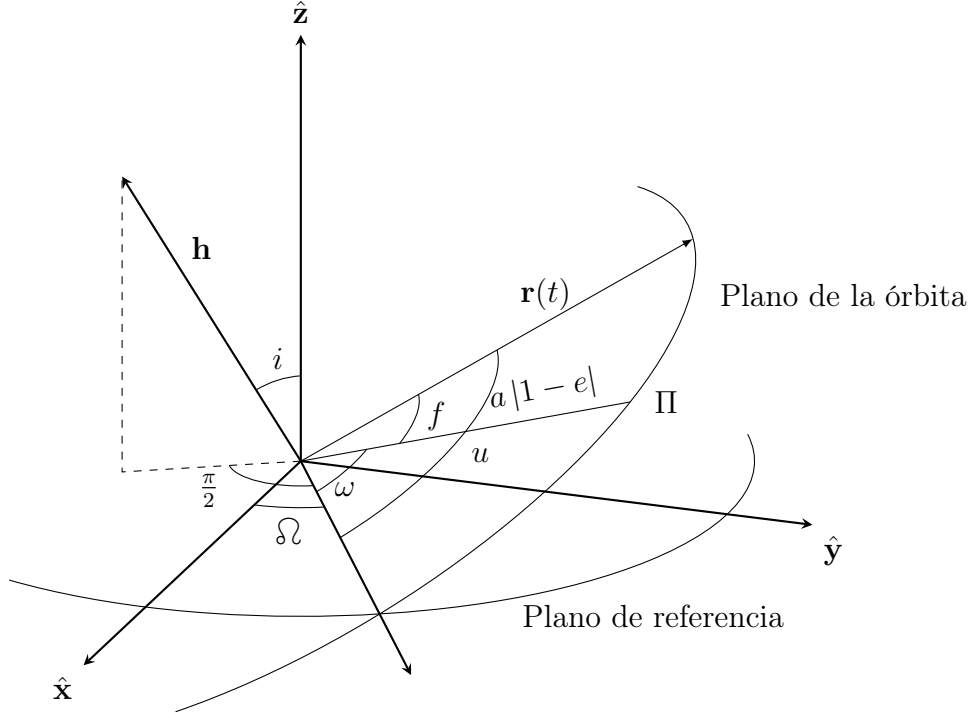
$$R(\varnothing) = \begin{pmatrix} \cos \varnothing & \sin \varnothing & 0 \\ -\sin \varnothing & \cos \varnothing & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

y luego otra alrededor del (nuevo) eje  $x$ , un ángulo igual a  $i$  dada por:

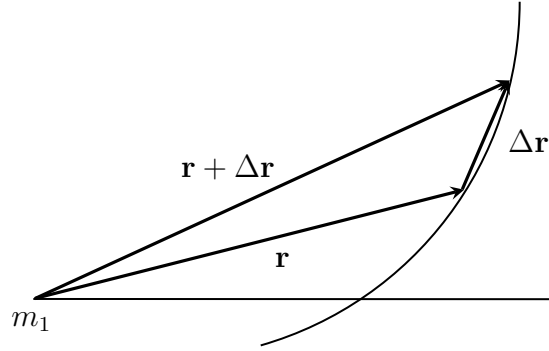
$$R(i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

Antes de continuar la resolución del problema aquí considerado, se presenta una de las propiedades más interesantes del movimiento en un campo de fuerzas central. Sea  $\mathbf{r}$  el radio vector de la partícula  $m_2$  en un dado instante  $t$  y sea  $\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}$  el radio vector de la misma en el instante posterior  $t + \Delta t$ , ambos indicados en la Fig. 2.3. Esto es, en el intervalo de tiempo  $\Delta t$ , el mencionado radio vector se incrementa en  $\Delta \mathbf{r}$  y barre





**Figura 2.2:** Orientación del plano de la órbita y los correspondientes elementos orbitales.



**Figura 2.3:** Área barrida por el radio vector de la partícula de masa  $m_2$  desde el instante  $t$  al  $t + \Delta t$

un área  $\Delta A$  en el plano de la órbita. Esta última es aproximadamente igual al área del triángulo determinado por los vectores  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}$  y  $\Delta \mathbf{r}$ , es decir

$$\Delta A \simeq \frac{1}{2} \|\mathbf{r} \times \Delta \mathbf{r}\| \quad (2.32)$$

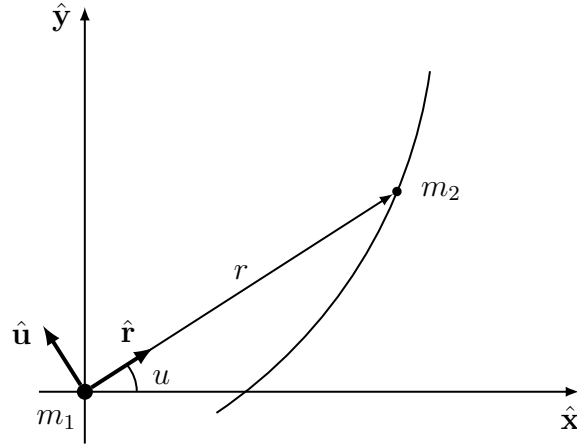
Dividiendo a ambos lados de esta última ecuación por el intervalo de tiempo  $\Delta t$ , se tiene:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} \simeq \frac{1}{2} \left\| \mathbf{r} \times \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right\| \quad (2.33)$$

Cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  la aproximación se vuelve exacta y resulta:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}\| = \frac{1}{2} \|\mathbf{h}\| \quad (2.34)$$

en virtud de la Ec. (2.27). Por supuesto,  $dA/dt$  es la conocida *velocidad areolar* y la Ec. (2.34) asegura que la misma es constante —ya que el vector  $\mathbf{h}$  lo es— y, en conclusión, esta última es la expresión matemática de la Segunda Ley de Kepler.



**Figura 2.4:** Movimiento de la masa puntual  $m_2$  en el plano de su órbita.

Si ahora se multiplica a ambos lados de la Ec. (2.26) escalarmente por  $\dot{\mathbf{r}}$ , se obtiene:

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r})$$

Esta última ecuación puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 - \frac{\mu}{r} \right) = 0 \quad (2.35)$$

La Ec (2.35) indica que la cantidad entre paréntesis se conserva en el tiempo. La misma se identifica con la energía total  $H$  del sistema por unidad de masa. Por lo tanto, puede escribirse:

$$H = \frac{1}{2} \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 - \frac{\mu}{r} \quad (2.36)$$

Las Ecs. (2.27) y (2.36) indican que se han encontrado cuatro constantes más que se suman a las seis anteriores que fijan la posición de centro de masa. Por lo tanto, se tienen en total diez constantes. Las dos constantes restantes están relacionadas con la forma y la orientación de la órbita en su plano.

Resulta conveniente, entonces, realizar la transformación de coordenadas al plano de la órbita, dado que es invariante. Sean  $x$  e  $y$  las coordenadas rectangulares —la coordenada  $z$  es, por supuesto, nula— y sean  $r$  y  $u$  las coordenadas polares en dicho sistema (Fig. 2.4). Estos dos conjuntos de coordenadas están relacionadas mediante:

$$\begin{aligned} x &= r \cos u \\ y &= r \sin u \end{aligned} \quad (2.37)$$

Por consiguiente, las componentes rectangulares de la velocidad de  $m_2$  son:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos u - r \dot{u} \sin u \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin u + r \dot{u} \cos u \end{aligned} \quad (2.38)$$

El vector  $\mathbf{h}$ , en virtud de su definición, sólo tiene una componente en la dirección del eje  $z$ , es decir a lo largo del eje perpendicular al plano de la órbita:

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = (x\dot{y} - y\dot{x}) \hat{\mathbf{z}} = h\hat{\mathbf{z}} \quad (2.39)$$

Haciendo uso de las Ecs. (2.37) y (2.38), se obtiene la expresión de  $h$  en coordenadas polares:

$$h = x\dot{y} - y\dot{x} = r^2\dot{u} \quad (2.40)$$

Las componentes de la aceleración son:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{r} \cos u - 2\dot{r}\dot{u} \sin u - r\ddot{u} \sin u - r\dot{u}^2 \cos u = -\frac{\mu}{r^2} \cos u \\ \ddot{y} &= \ddot{r} \sin u + 2\dot{r}\dot{u} \cos u + r\ddot{u} \cos u - r\dot{u}^2 \sin u = -\frac{\mu}{r^2} \sin u \end{aligned} \quad (2.41)$$

Las últimas igualdades en ambas ecuaciones valen en virtud de las ecuaciones de movimiento (2.26). Dado que la dirección a partir de la cual se mide  $u$  es arbitraria, se puede fijar  $u = 0$  —pero no así  $\dot{u}$  ni  $\ddot{u}$ —; entonces las ecuaciones de movimiento toman la forma:

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{u}^2 &= -\frac{\mu}{r^2} \\ 2\dot{r}\dot{u} + r\ddot{u} &= 0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

Si la segunda de las Ecs. (2.42) se multiplica por  $r$ , la misma puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} (r^2\dot{u}) = 0$$

Es decir, se obtiene la conservación del módulo del vector  $\mathbf{h}$ .

La Ec. (2.40) puede usarse para eliminar  $\dot{u}$  de la primera de las Ecs. (2.42), de lo cual resulta:

$$\ddot{r} - \frac{h}{r^3} = -\frac{\mu}{r^2} \quad (2.43)$$

Ahora bien, en lugar de resolver esta ecuación para obtener la ley de movimiento, resulta más ilustrativo obtener la trayectoria para todo instante de tiempo; esto es, en lugar de encontrar  $r(t)$  (que, además, es una tarea muy complicada), conviene obtener  $r(u)$ . Para ello, se debe reemplazar la derivada segunda respecto al tiempo usando la Ec. (2.40) convenientemente. Esto es,  $\dot{r}$  puede expresarse de la siguiente manera:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{dt} = \frac{h}{r^2} \frac{dr}{du} = -h \frac{d}{du} \left( \frac{1}{r} \right) = -h \frac{dq}{du} \quad (2.44)$$

y, en consecuencia,  $\ddot{r}$  puede escribirse como:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{h}{r^2} \frac{d}{du} \left( \frac{h}{r^2} \frac{d}{du} \right) = -\frac{h^2}{r^2} \frac{d^2}{du^2} \left( \frac{1}{r} \right)$$

O bien:

$$\ddot{r} = -h^2 q^2 \frac{d^2 q}{du^2} \quad (2.45)$$

Tanto en la Ec. (2.44) como en la (2.45) se ha hecho la sustitución  $q = 1/r$ . Por lo tanto, la Ec. (2.43) queda expresada:

$$\frac{d^2 q}{du^2} + q = \frac{\mu}{h^2} \quad (2.46)$$

Esta ecuación diferencial puede resolverse inmediatamente y la solución es:

$$q = \frac{1}{r} = A \cos(u - \omega) + \frac{\mu}{h^2} \quad (2.47)$$

Donde  $A$  y  $\omega$  son las dos constantes de integración que restaba encontrar. Conviene ahora reescribir la Ec. (2.47) de la siguiente manera:

$$\frac{h^2}{\mu} \frac{1}{r} = 1 + \frac{h^2}{\mu} A \cos(u - \omega) \quad (2.48)$$

Esta última expresión puede compararse con la ecuación general de una cónica centrada en uno de sus focos (o en su foco):

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos f \quad (2.49)$$

donde  $p$  es el *semi latus rectum*,  $e$  es la *excentricidad* y  $f$  es la *anomalía verdadera*. En consecuencia, se tiene:

$$p = \frac{h^2}{\mu}, \quad e = \frac{h^2}{\mu} A \quad \text{y} \quad f = u - \omega \quad (2.50)$$

Cabe destacar en este punto que se ha llegado a la expresión matemática de la primera Ley de Kepler, esto es: *las órbitas planetarias son cónicas con el primario en uno de sus focos*.

Sin mucha dificultad se pueden encontrar expresiones más convenientes para la energía  $H$  y la excentricidad  $e$ . Para lograr esto, se debe notar primero que:

$$\|\dot{\mathbf{r}}\|^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{u}^2 = \dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}$$

Por lo tanto, la Ec. (2.36) queda escrita como:

$$H = \frac{1}{2} \left( \dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r} \quad (2.51)$$

En virtud de las Ecs. (2.44) y (2.47) se tiene:

$$\dot{r} = -h A \sin(u - \omega) = -h A \sin f \quad (2.52)$$

De aquí puede verse fácilmente que  $\dot{r}$  se anula cuando  $f = 0$  y  $f = \pi$ . Por otro lado, de la Ec. (2.49) se deduce que, cuando  $f = 0$ ,  $r$  es mínimo. En particular, este punto de la cónica se conoce como *periastro* —esto es, el punto donde se tiene la menor distancia entre  $m_1$  y  $m_2$ — y, en consecuencia,  $\omega$  se denomina *longitud del periastro*.

Reemplazando las Ecs. (2.47) y (2.52) en la Ec. (2.51) y luego realizando algunas operaciones algebraicas se llega a:

$$H = \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{h^2} \left( \frac{h^4 A^2}{\mu^2} - 1 \right)$$

Expresión que puede reescribirse en función de  $p$  y  $e$  usando las dos primeras ecuaciones de (2.50), resultando:

$$H = \frac{\mu}{2p} (e^2 - 1) \quad (2.53)$$

de donde puede obtenerse una expresión alternativa de la excentricidad:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2pH}{\mu}} \quad (2.54)$$

$E$	$e$	$p$	TIPO DE CÓNICA
$< 0$	$= 0$	$a$	Circunferencia
$< 0$	$< 1$	$a(1 - e^2)$	Elipse
$= 0$	$= 1$	$p$	Parábola
$> 0$	$> 1$	$a(e^2 - 1)$	Hipérbola

**Tabla 2.1:** Clasificación de las órbitas según la energía y la excentricidad con las correspondientes expresiones del *semi latus rectum*.

Esta última expresión permite clasificar las órbitas en función de la energía total del sistema. En la Tabla 2.1 se muestra dicha clasificación y la expresión de  $p$  correspondiente en función de la  $e$  y  $a$ , el *semieje mayor*.

Es de particular interés en este trabajo el caso de la elipse, motivo por el cual se van a dar las expresiones de la energía, la excentricidad y el *semi latus rectum* para el mismo:

$$H = -\frac{\mu}{2a} \quad (2.55)$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{h^2}{\mu a}} \quad (2.56)$$

$$p = \frac{h^2}{\mu} = a(1 - e^2) \quad (2.57)$$

De la Ec. (2.57) puede obtenerse una expresión alternativa de la magnitud del vector  $\mathbf{h}$ , la cual es:

$$h = \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \quad (2.58)$$

En virtud de la Ec. (2.34) se tiene que la mitad de  $h$  es la magnitud de la velocidad areolar, por lo tanto:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \quad (2.59)$$

Por otro lado, sea  $P$  el tiempo que tarda  $m_2$  en completar una revolución alrededor de  $m_1$ , se define entonces la *frecuencia orbital* o *movimiento medio*  $n$  como

$$n = \frac{2\pi}{P} \quad (2.60)$$

El área encerrada por una elipse es

$$A = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2} \quad (2.61)$$

Dado que la velocidad areolar es constante, se tiene que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{A}{P} = \frac{n}{2\pi} \pi a^2 \sqrt{1 - e^2} = \frac{na^2}{2} \sqrt{1 - e^2} \quad (2.62)$$

Entonces, igualando los lados derechos de las Ecs. (2.59) y (2.62), resulta:

$$\mu = n^2 a^3 \quad (2.63)$$

que no es otra cosa que la expresión matemática de la tercera Ley de Kepler.

Considérense las Ecs. (2.51) y (2.55). Al igualar éstas, se obtiene:

$$\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (2.64)$$

Luego, si se reemplazan  $h$  y  $\mu$  por sus correspondientes expresiones dadas por las Ecs. (2.58) y (2.63), respectivamente, resulta:

$$\dot{r}^2 + \frac{n^2 a^4 (1 - e^2)}{r^2} = 2n^2 a^3 \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (2.65)$$

de donde se puede despejar  $\dot{r}^2$ :

$$\left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{a^2 n^2}{r^2} [a^2 e^2 - (r - a)^2] \quad (2.66)$$

De esta manera resulta más simple despejar  $n dt$ :

$$n dt = \frac{r}{a} \frac{dr}{\sqrt{a^2 e^2 - (r - a)^2}} \quad (2.67)$$

Para integrar la Ec. (2.67) conviene realizar un cambio de variables.

Sea un sistema de coordenadas rectangulares  $(x', y')$  cuyo origen coincide con el centro de una elipse dada (Fig. 2.5). En dicho sistema, las ecuaciones paramétricas de la elipse son:

$$\begin{aligned} x' &= a \cos E \\ y' &= a \sqrt{1 - e^2} \sin E \end{aligned} \quad (2.68)$$

Pero dado que siempre se toma como origen a uno de los focos, entonces se debe transformar a otro sistema de coordenadas  $(x, y)$  mediante:

$$\begin{aligned} x &= x' - ae \\ y &= y' \end{aligned} \quad (2.69)$$

Además, las coordenadas  $(x, y)$ , se pueden transformar a coordenadas polares  $(r, f)$  mediante las conocidas relaciones  $x = r \cos f$  e  $y = r \sin f$  y, por lo tanto, se tiene:

$$\begin{aligned} r \cos f &= a(\cos E - e) \\ r \sin f &= a \sqrt{1 - e^2} \sin E \end{aligned} \quad (2.70)$$

El ángulo  $E$ , se conoce como *anomalía excéntrica*. Si se elevan al cuadrado ambos lados de las Ecs. (2.70) y luego se suman dichas ecuaciones, se obtiene:

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (2.71)$$

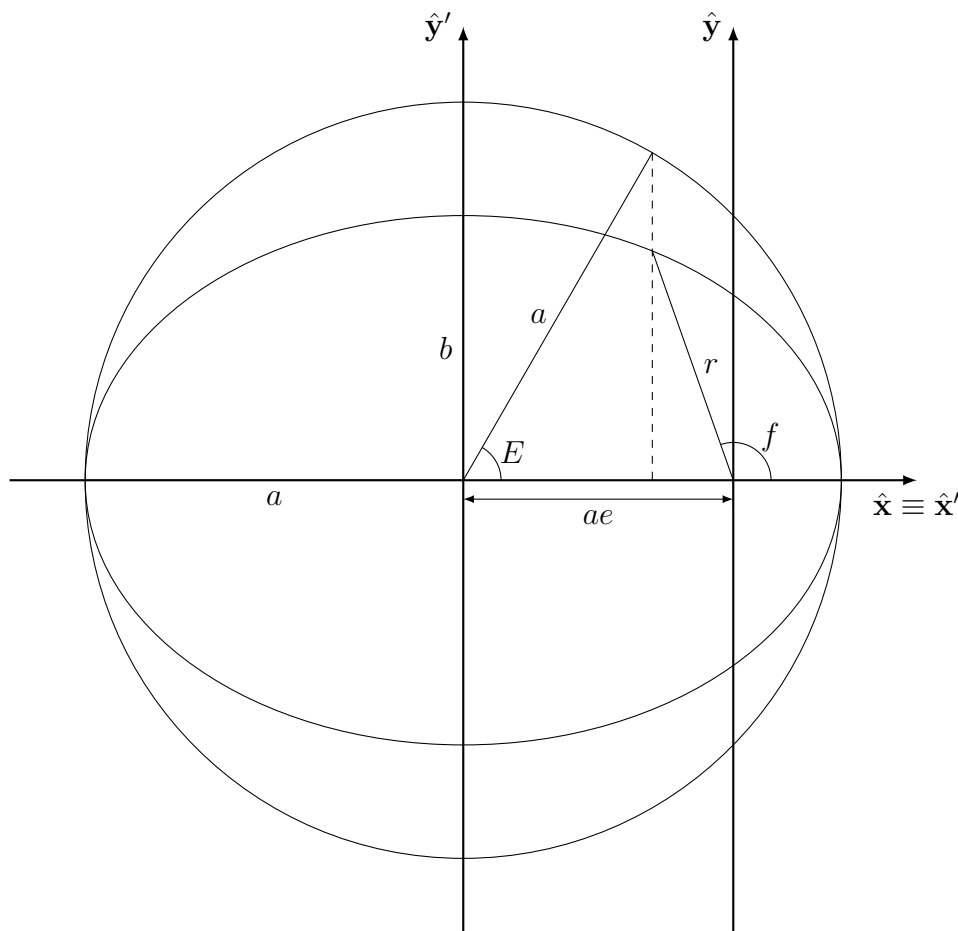
de donde se obtienen expresiones para  $r/a$  y  $r - a$ , las cuales, luego de ser reemplazadas en la Ec. (2.67) y operando, resulta:

$$n dt = (1 - e \cos E) dE \quad (2.72)$$

Esta última expresión puede integrarse inmediatamente, dando:

$$M = n(t - T_0) = E - e \sin E \quad (2.73)$$

donde  $M$  se conoce como la *anomalía media* y  $T_0$  es el *tiempo de pasaje por el periastro*. La Ec. (2.73) se conoce como *Ecuación de Kepler* (Kopeikin et al., 2011).



**Figura 2.5:** Elipse y su correspondiente circunferencia auxiliar, de radio igual a la longitud del semieje mayor.

### 2.1.3. Movimiento orbital perturbado y ecuaciones planetarias de Lagrange

Como se expuso en la sección anterior, la dinámica orbital de dos masas puntuales que interactúan sólo mediante la fuerza de atracción gravitatoria que se ejercen mutuamente puede describirse completamente a partir de la solución de la ecuación de movimiento:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{0} \quad (2.74)$$

la cual es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden para cada una de las coordenadas de la partícula de masa  $m_2$  con respecto a aquella de masa  $m_1$ . Como se sabe, la Ec. (2.74) admite solución analítica completa (Kopeikin *et al.*, 2011). Ahora bien, el problema de los dos cuerpos corresponde a una situación ideal que solamente se observa de forma aproximada. Sin embargo, tal como se verá a continuación, dicha solución resulta muy útil para tratar el movimiento perturbado.

Debido a diversas causas, pueden aparecer otras fuerzas  $\Delta \mathbf{F}$  y, por lo tanto, aceleraciones extras, que perturban el movimiento de los dos cuerpos antes considerados. Cuando eso ocurre, dichas fuerzas perturbativas se agregan a la Ec. (2.74), esto es:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \Delta \mathbf{F}; \quad (2.75)$$

de esta forma, el sistema de ecuaciones diferenciales que describen el movimiento relativo antes mencionado se vuelve inhomogéneo. Una de las técnicas más conocidas para resolver este tipo de ecuaciones es el método de variación de parámetros, el cual fue explorado por primera vez por Euler y posteriormente fue desarrollado de forma completa y rigurosa por Lagrange (Efroimsky, 2005a,b). Tal como su nombre lo indica, este método básicamente consiste en variar las constantes que se obtienen como solución de la correspondiente ecuación diferencial homogénea, las cuales pasan a ser parámetros que sirven para describir el movimiento perturbado.

En virtud de lo discutido anteriormente, de la integración de la Ec. (2.74) surgen seis constantes que han de ser determinadas por las condiciones iniciales que pueden ser las componentes de los vectores de posición y velocidad iniciales, o bien de dos vectores de posición en dos instantes de tiempo distintos. Sean  $C_1, \dots, C_6$  las constantes de integración indicadas anteriormente tales que:

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(C_1, \dots, C_6, t) \quad (2.76)$$

y

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{g}(C_1, \dots, C_6, t) = \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right)_{C_i = \text{const.}} \quad (2.77)$$

lo cual, por supuesto, es válido para el caso no perturbado. Ahora bien, en presencia de fuerzas perturbadoras, las constantes  $C_i$  dejan de serlo y se convierten en parámetros dependientes del tiempo ( $C_i(t)$ ). Así, si la Ec. (2.76) se deriva respecto del tiempo, se obtiene:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial C_i} \frac{dC_i}{dt} = \mathbf{g} + \Phi \quad (2.78)$$

Si esta última ecuación se diferenciara nuevamente respecto del tiempo para luego reemplazarla en la Ec. (2.75), se obtendría una expresión que involucra tanto a las derivadas primeras como segundas de los  $C_i$  respecto del tiempo, con lo que se obtendrían tres ecuaciones con seis incógnitas que podrían satisfacerse de infinitas formas. Para que el problema quede bien definido, se debe dar una forma explícita a la función vectorial  $\Phi$ , la cual es totalmente arbitraria (Efroimsky, 2005a,b). La elección más habitual es imponer la conocida restricción de Lagrange, esto es  $\Phi = \mathbf{0}$ . Sin embargo, debe destacarse que esto no se hace solamente por mera simplicidad, sino que tiene un significado físico más profundo. Si se acepta que las  $C_i(t)$  son funciones suaves del tiempo, entonces en cada instante  $t$  las funciones  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{g}$  dan la posición y la velocidad del cuerpo perturbado sobre una cónica determinada que, a su vez, describe la trayectoria del mismo. Por supuesto, la posición “real” siempre está dada por  $\mathbf{f}$ . En cambio, la velocidad física  $\dot{\mathbf{r}}$  —es decir, tangente a la trayectoria real— está determinada por la composición entre la antes mencionada velocidad sobre la cónica instantánea y la propia variación en el tiempo de los parámetros de la misma, dada por  $\Phi$ . En consecuencia, la restricción de Lagrange es equivalente a imponer que la cónica que parametriza la trayectoria real del cuerpo cuyo movimiento se ve perturbado sea siempre tangente a dicha trayectoria real, esto es, que sea  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{g}$ . Luego, si se impone que

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial C_i} \frac{dC_i}{dt} = \mathbf{0}, \quad (2.79)$$

entonces se tiene:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{g}. \quad (2.80)$$



Derivando nuevamente respecto del tiempo, se obtiene:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial C_i} \frac{dC_i}{dt} \quad (2.81)$$

donde se ha tenido en cuenta la Ec. (2.77). Si ahora se reemplazan las Ecs. (2.81) y (2.76) en la Ec. (2.75) resulta:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2} + \mu \frac{\mathbf{f}}{r^3} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial C_i} \frac{dC_i}{dt} = \Delta \mathbf{F}. \quad (2.82)$$

Ahora bien, dado que la función  $\mathbf{f}$  parametriza una cónica, es decir, una trayectoria no perturbada, entonces es solución del sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas —Ec. (2.74)— y, por lo tanto, la Ec. (2.82) queda expresada como:

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial C_i} \frac{dC_i}{dt} = \Delta \mathbf{F}. \quad (2.83)$$

El paso siguiente es multiplicar escalarmente la Ec (2.79) por  $-\partial \mathbf{g}/\partial C_k$ , la Ec. (2.83) por  $\partial \mathbf{f}/\partial C_k$  y sumar ambas ecuaciones; el resultado es:

$$\sum_{i=1}^6 \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial C_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial C_i} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial C_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial C_k} \right) \frac{dC_i}{dt} = \Delta \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial C_k}. \quad (2.84)$$

La cantidad entre paréntesis se conoce como *corchete de Lagrange*  $—[C_k C_i]—$ , los cuales son los elementos de la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones lineales que permite determinar las derivadas temporales de los  $C_i$  dado por la Ec. (2.84). Los  $C_i$  son seis en total, por lo tanto, en principio serían 36 los corchetes de Lagrange a calcular. Sin embargo, a partir de su definición puede verse que satisfacen las siguientes propiedades (Kopeikin *et al.*, 2011):

- $[C_i C_i] = 0$  y
- $[C_k C_i] = -[C_i C_k]$ .

En consecuencia, la matriz de coeficientes cuyos elementos son los corchetes de Lagrange es antisimétrica y, por tanto, quedan quince corchetes de Lagrange independientes a determinar.

La tarea de calcular los corchetes de Lagrange es, de entrada, bastante ardua. Más aún si se tiene en cuenta la generalidad de la Ec. (2.84), dado que esta es válida para un conjunto arbitrario de constantes de integración que surge de la solución del problema de los dos cuerpos y para cualesquiera fuerzas perturbativas, esto es, su origen y su intensidad son totalmente arbitrarios. Sin embargo, dicha tarea puede simplificarse en gran medida eligiendo algún conjunto particular de parámetros orbitales y una forma funcional concreta de la fuerza perturbadora. Para el caso de órbitas elípticas, un conjunto conveniente de parámetros son el semieje mayor  $a$ , la excentricidad  $e$ , la anomalía media en la época  $M_0$ , la inclinación del plano orbital con respecto a un plano de referencia inercial  $i$ , el argumento del periastro  $\omega$  y la longitud del nodo ascendente

$\delta\Omega$ . En tal caso, las funciones  $\mathbf{f} = f_1\mathbf{e}_x + f_2\mathbf{e}_y + f_3\mathbf{e}_z$  y  $\mathbf{g} = g_1\mathbf{e}_x + g_2\mathbf{e}_y + g_3\mathbf{e}_z$  vienen dadas por:

$$f_1 = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f} [\cos \delta\Omega \cos(\omega + f) - \sin \delta\Omega \sin(\omega + f) \cos i] \quad (2.85a)$$

$$f_2 = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f} [\sin \delta\Omega \cos(\omega + f) - \cos \delta\Omega \sin(\omega + f) \cos i] \quad (2.85b)$$

$$f_3 = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f} \sin(\omega + f) \sin i \quad (2.85c)$$

y por:

$$g_1 = -\frac{na}{\sqrt{1-e^2}} [\cos \delta\Omega \sin(\omega + f) + \sin \delta\Omega \cos(\omega + f) \cos i + e(\cos \delta\Omega \sin \omega + \sin \delta\Omega \cos \omega \cos i)] \quad (2.86a)$$

$$g_2 = -\frac{na}{\sqrt{1-e^2}} [\sin \delta\Omega \sin(\omega + f) - \cos \delta\Omega \cos(\omega + f) \cos i + e(\sin \delta\Omega \sin \omega - \cos \delta\Omega \cos \omega \cos i)] \quad (2.86b)$$

$$g_3 = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} [\cos(\omega + f) + e \cos \omega] \sin i \quad (2.86c)$$

La anomalía verdadera  $f$  está relacionada con la anomalía excéntrica  $E$  mediante:

$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \quad (2.87)$$

y, a su vez, la relación entre esta última y la anomalía media está dada por la ecuación de Kepler, Ec. (2.73). Además, si  $t_0$  es el instante de tiempo (o época, denominación habitual en Astronomía) en el que se determinan los elementos orbitales, entonces para cualquier otro instante  $t$  la anomalía media está dada por:

$$M = n(t - t_0) + M_0 \quad (2.88)$$

donde  $n$  es la frecuencia orbital media definida mediante la Ec. (2.63).

Otra propiedad de los corchetes de Lagrange, quizás la más notable, es que son independientes del tiempo (Brouwer y Clemence, 1961; Kopeikin *et al.*, 2011). Así, los mismos pueden evaluarse en algún punto conveniente de la órbita; por supuesto, la elección más adecuada es el periastro, donde  $f = E = M = 0$ .

Para calcular los corchetes de Lagrange conviene expresarlos según la forma introducida por Whittaker (Brouwer y Clemence, 1961):

$$[C_k C_i] = \frac{\partial(M_0, L)}{\partial(C_k, C_i)} + \frac{\partial(\omega, G)}{\partial(C_k, C_i)} + \frac{\partial(\delta\Omega, H)}{\partial(C_k, C_i)} \quad (2.89)$$

donde

$$L = \sqrt{\mu a} \quad (2.90)$$

$$G = L\sqrt{1-e^2} \quad (2.91)$$

$$H = G \cos i \quad (2.92)$$

y

$$\frac{\partial(a, b)}{\partial(c, d)} = \frac{\partial a}{\partial c} \frac{\partial b}{\partial d} - \frac{\partial a}{\partial d} \frac{\partial b}{\partial c}. \quad (2.93)$$

De esta manera se encuentra que solamente seis de los quince corchetes de Lagrange independientes son distintos de cero:

$$[M_0 a] = \frac{n a}{2} \quad (2.94a)$$

$$[\omega a] = \frac{n a}{2} \sqrt{1 - e^2} \quad (2.94b)$$

$$[\omega e] = -\frac{n a^2 e}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (2.94c)$$

$$[\delta \Omega a] = \frac{n a}{2} \sqrt{1 - e^2} \cos i \quad (2.94d)$$

$$[\delta \Omega e] = -\frac{n a^2 e \cos i}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (2.94e)$$

$$[\delta \Omega i] = -n a^2 \sqrt{1 - e^2} \sin i \quad (2.94f)$$

Por otro lado, si la aceleración perturbadora puede expresarse como el gradiente de un potencial perturbador  $W$ , se tiene:

$$\Delta \mathbf{F} = -\nabla W = \frac{\partial R}{\partial \mathbf{f}}, \quad (2.95)$$

y en consecuencia:

$$\Delta \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial C_k} = \frac{\partial R}{\partial C_k}, \quad (2.96)$$

donde  $R = -W$  se conoce como función perturbadora.

En virtud de lo expuesto hasta este punto, la Ec. (2.84) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^6 [C_k C_i] \frac{dC_i}{dt} = \frac{\partial R}{\partial C_k} \quad (k = 1, \dots, 6) \quad (2.97)$$

Luego, si se define  $(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) = (a, e, i, M_0, \omega, \delta \Omega)$ , el sistema de ecuaciones expresado de forma general por la Ec. (2.97) viene dado de forma explícita como:

$$[a M_0] \frac{dM_0}{dt} + [a \omega] \frac{d\omega}{dt} + [a \delta \Omega] \frac{d\delta \Omega}{dt} = \frac{\partial R}{\partial a} \quad (2.98)$$

$$[e \omega] \frac{d\omega}{dt} + [e \delta \Omega] \frac{d\delta \Omega}{dt} = \frac{\partial R}{\partial e} \quad (2.99)$$

$$[i \delta \Omega] \frac{d\delta \Omega}{dt} = \frac{\partial R}{\partial i} \quad (2.100)$$

$$[M_0 a] \frac{da}{dt} = \frac{\partial R}{\partial M_0} \quad (2.101)$$

$$[\omega a] \frac{da}{dt} + [\omega e] \frac{de}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \omega} \quad (2.102)$$

$$[\delta \Omega a] \frac{da}{dt} + [\delta \Omega e] \frac{de}{dt} + [\delta \Omega i] \frac{di}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \delta \Omega} \quad (2.103)$$

$$(2.104)$$

Por supuesto, este sistema de ecuaciones puede resolverse para las derivadas temporales de los elementos orbitales. Teniendo en cuenta las expresiones de los corchetes de Lagrange dadas por las Ecs. (2.94) se obtiene:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n a} \frac{\partial R}{\partial M_0} \quad (2.105a)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{n a^2 e} \left( \sqrt{1-e^2} \frac{\partial R}{\partial M_0} - \frac{\partial R}{\partial \omega} \right) \quad (2.105b)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{n a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \left( \cos i \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right) \quad (2.105c)$$

$$\frac{dM_0}{dt} = -\frac{2}{n a} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{n a^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} \quad (2.105d)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{n a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{n a^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} \quad (2.105e)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{n a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}. \quad (2.105f)$$

Estas expresiones en conjunto se conocen como las Ecuaciones Planetarias de Lagrange y, así formuladas, contienen un problema serio. Esto se debe a que, como se verá más adelante, la función perturbadora se expande en función de  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\omega$ ,  $\Omega$  y  $M$ . Esto es,  $R = R(a, e, i, M, \omega, \Omega)$  donde  $M$  depende explícitamente del tiempo —Ec. (2.88)— e implícitamente de  $a$  a través de  $n$  —Ec. (2.63)—. Por lo tanto, al derivar  $R$  respecto de  $a$  se tiene:

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \left( \frac{\partial R}{\partial a} \right) + \frac{\partial R}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial a}, \quad (2.106)$$

donde el término entre paréntesis significa que se deriva respecto de  $a$  en tanto que este parámetro aparezca explícitamente. En virtud de la Ec. (2.88) resulta:

$$\frac{\partial M}{\partial a} = \frac{\partial n}{\partial a} (t - t_0). \quad (2.107)$$

Esto es, aparece un término directamente proporcional al intervalo de tiempo. Una forma de eliminar esta dificultad se logra considerando la variación temporal de la anomalía media. Nuevamente de la Ec. (2.88) se obtiene:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dn}{dt} (t - t_0) + n + \frac{dM_0}{dt}. \quad (2.108)$$

Ahora bien, la derivada de  $n$  respecto al tiempo es:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\partial n}{\partial a} \frac{da}{dt}, \quad (2.109)$$

donde:

$$\frac{\partial n}{\partial a} = -\frac{3}{2} \frac{n}{a}, \quad (2.110)$$

en virtud de la Ec. (2.63). Teniendo en cuenta esta última expresión y la Ec. (2.105a), la Ec. (2.109) puede reescribirse como:

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3}{a^2} \frac{\partial R}{\partial M}. \quad (2.111)$$

No es difícil ver que, en virtud de la Ec. (2.88), es:

$$\frac{\partial M}{\partial M_0} = 1, \quad (2.112)$$

por lo que será indiferente derivar respecto de  $M$  o de  $M_0$ . Luego, reemplazando la Ec. (2.110) en la Ec. (2.107), y a su vez esta en la Ec. (2.106), se obtiene:

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \left( \frac{\partial R}{\partial a} \right) - \frac{3}{2} \frac{n}{a} \frac{\partial R}{\partial M} (t - t_0). \quad (2.113)$$

Usando esta nueva expresión, la Ec. (2.105d) puede reescribirse como:

$$\frac{dM_0}{dt} = -\frac{2}{na} \left( \frac{\partial R}{\partial a} \right) + \frac{3}{a^2} \frac{\partial R}{\partial M} (t - t_0) - \frac{1 - e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} \quad (2.114)$$

En virtud de las Ecs. (2.111) y (2.114), la Ec. (2.108) queda expresada como:

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= -\frac{3}{a^2} \frac{\partial R}{\partial M} (t - t_0) + n - \frac{2}{na} \left( \frac{\partial R}{\partial a} \right) + \frac{3}{a^2} \frac{\partial R}{\partial M} (t - t_0) - \frac{1 - e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} \\ &= n - \frac{2}{na} \left( \frac{\partial R}{\partial a} \right) - \frac{1 - e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} \end{aligned} \quad (2.115)$$

Por lo tanto, se debe reemplazar la Ec. (2.105d) por la Ec. (2.115) en las Ecuaciones Planetarias de Lagrange y se debe agregar la Ec. (2.111) para tener en cuenta la variación temporal de  $n$  debido a las perturbaciones que se consideren en una simulación numérica.

#### 2.1.4. Dinámica rotacional de cuerpos celestes

El punto de partida para el estudio de la dinámica rotacional de planetas, estrellas y demás cuerpos celestes es el análisis teórico del movimiento del sólido rígido (Murray y Dermott, 1999).

Por definición, un cuerpo rígido es aquél cuyas partículas constituyentes se encuentran a distancias fijas unas de otras. Por supuesto, esta también es una idealización —tal como se mencionó en el caso del problema de dos cuerpos interactuando gravitatoriamente— dado que todos los cuerpos se deforman en mayor o menor medida. Sin embargo, por lo general ocurre que dichas deformaciones son lo suficientemente pequeñas como para que los resultados teóricos del estudio de la dinámica del cuerpo rígido puedan considerarse buenas aproximaciones a la realidad.

En virtud de la definición dada en el párrafo anterior, si se tiene la posición de una de las partículas del cuerpo sólido (o un elemento de masa del mismo), entonces las posiciones de todas las demás quedan totalmente determinadas. En este sentido, resulta conveniente elegir el centro de masa del cuerpo para definir su posición.

Para describir el movimiento del sólido, se requiere de al menos dos sistemas de referencia: uno fijo (o inercial) y otro ligado al cuerpo rígido cuyo origen coincide con el centro de masa del mismo (sistema móvil). De esta forma, el estado dinámico del cuerpo considerado queda inequívocamente determinado por la posición ( $\mathbf{R}$ ) y velocidad ( $\mathbf{V}_{\text{CM}}$ ) de su centro de masa, por la velocidad angular ( $\boldsymbol{\omega}$ ) y por la orientación del sistema móvil con respecto al fijo.

La energía cinética ( $T$ ) de un sólido rígido está dada por:

$$T = \frac{1}{2}m\|\mathbf{V}_{\text{CM}}\|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}_{\text{rot}} \quad (2.116)$$

donde  $m$  es la masa del cuerpo rígido, y  $\mathbf{L}_{\text{rot}}$  es el momento angular de rotación del mismo, el cual se define como:

$$\mathbf{L}_{\text{rot}} = \mathbb{I}\boldsymbol{\omega} \quad (2.117)$$

siendo  $\mathbb{I}$  el tensor de inercia, el cual es un tensor de rango 2, es decir, una matriz. Sea  $\mathbf{x}$  el vector de posición de un elemento de masa cualquiera del cuerpo rígido y sean  $(x_1, x_2, x_3)$  sus coordenadas respecto del sistema móvil. Las componentes del tensor de inercia respecto del sistema móvil son:

$$I_{jk} = \iiint_V \rho(\mathbf{x}) (r^2 \delta_{jk} - x_j x_k) dV \quad (2.118)$$

donde  $\rho(\mathbf{x})$  es la densidad en el punto  $\mathbf{x}$ ,  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  y la integración se lleva a cabo sobre todo el volumen  $V$  del cuerpo. Por supuesto, el tensor de inercia podría haberse definido con respecto al sistema fijo. Sin embargo debe observarse que en este último las coordenadas de los elementos de masa variarían en el tiempo debido al movimiento mismo del cuerpo y, como consecuencia, el tensor de inercia sería también dependiente del tiempo, lo que complica innecesariamente el problema. Puede verse por su definición que el tensor de inercia es simétrico,  $I_{jk} = I_{kj}$ . Los elementos de la diagonal principal son los *momentos de inercia* del cuerpo, mientras que los demás elementos del tensor se denominan *productos de inercia*.

Vale la pena mencionar que siempre es posible encontrar un sistema de ejes solidario al cuerpo tal que el tensor de inercia sea diagonal, a este sistema lo denominaremos de aquí en más sistema de ejes principales. En dicho sistema  $\mathbb{I}$  tiene la forma:

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad (2.119)$$

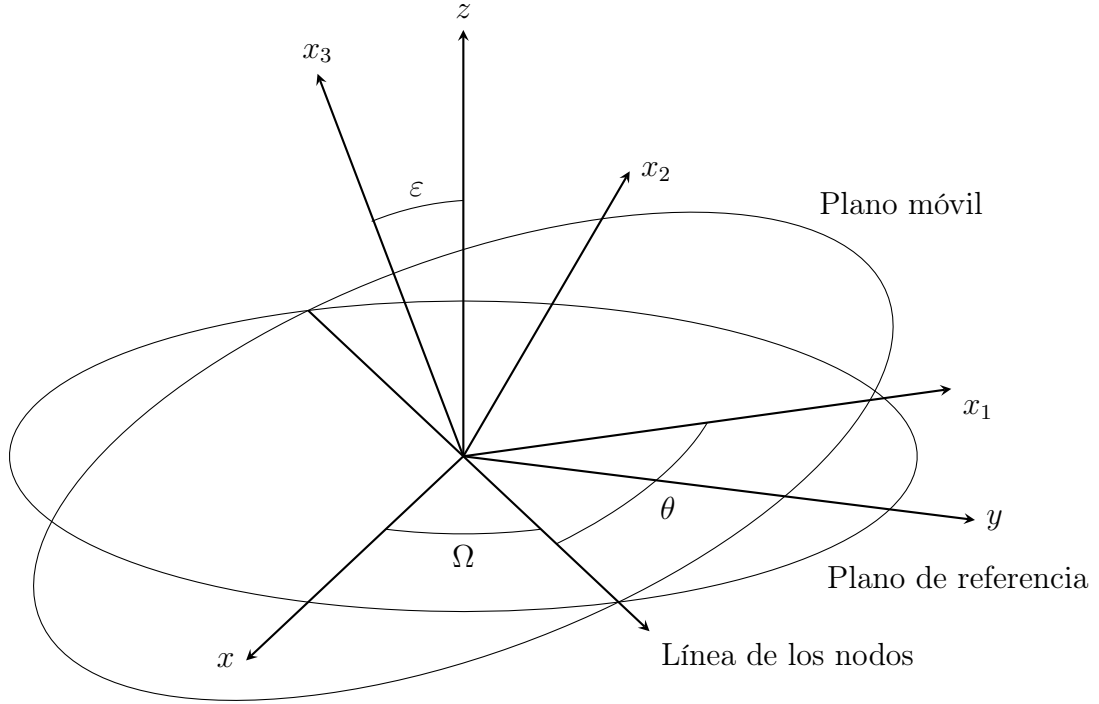
donde  $A = I_{11}$ ,  $B = I_{22}$  y  $C = I_{33}$  son los momentos principales de inercia. En el sistema de ejes principales, la energía cinética de rotación tiene una forma particularmente sencilla:

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} (A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2) \quad (2.120)$$

donde  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  y  $\omega_3$  son las componentes de la velocidad angular en el sistema móvil.

La Ec. (2.116) permite ver de forma más explícita la ventaja de haber elegido el centro de masa del cuerpo como origen del sistema móvil. Puesto que el movimiento de traslación es equivalente al de una masa puntual de magnitud igual a la masa total del cuerpo rígido, y que dicho movimiento ya fue descrito cuando se trató la dinámica orbital, a partir de aquí se va a centrar la atención en el movimiento de rotación exclusivamente. En esta circunstancia, resulta válido considerar que el origen del sistema de referencia fijo coincide también con el centro de masa del cuerpo.

Es necesario ahora establecer parámetros que indiquen de forma unívoca la orientación del sistema de referencia solidario al cuerpo respecto de un sistema de referencia inercial. Un conjunto de parámetros muy utilizado son los ángulos de Euler, los cuales se definen mediante tres rotaciones sucesivas desde el sistema de referencia hasta



**Figura 2.6:** Definición de los ángulos de Euler: precesión ( $\Omega$ ), nutación ( $\varepsilon$ ) y rotación propia ( $\theta$ ).

el sistema del cuerpo. Por supuesto, existen también otros conjuntos de parámetros e incluso distintas convenciones para definir los ángulos de Euler. En este trabajo se va a utilizar el convenio utilizado habitualmente en Mecánica Celeste, es decir el convenio  $z-x-z$ . En dicho convenio, la primera rotación se efectúa alrededor del eje  $z$  (inercial) un ángulo  $\Omega$ , llamado ángulo de precesión. El nuevo eje  $x$  define la línea de los nodos. La segunda rotación se realiza alrededor de este último eje un ángulo  $\varepsilon$ , llamado nutación. La tercera y última rotación se efectúa alrededor del nuevo eje  $z$  bajo un ángulo  $\theta$ , que corresponde al ángulo de rotación propia (Fig. 2.6). Los ángulos  $\Omega$  y  $\theta$  varían en el intervalo de 0 a  $2\pi$ , mientras que  $\varepsilon$  lo hace en el intervalo de 0 a  $\pi$ .

Las componentes de la velocidad angular en el sistema móvil pueden expresarse en función de los ángulos de Euler y sus derivadas temporales:

$$\omega_1 = \dot{\Omega} \sin \varepsilon \sin \theta + \dot{\varepsilon} \cos \theta \quad (2.121a)$$

$$\omega_2 = \dot{\Omega} \sin \varepsilon \cos \theta - \dot{\varepsilon} \sin \theta \quad (2.121b)$$

$$\omega_3 = \dot{\Omega} \cos \varepsilon + \dot{\theta} \quad (2.121c)$$

Estas expresiones serán muy útiles en lo que sigue.

Las ecuaciones de movimiento del cuerpo rígido, expresadas en el sistema móvil, se conocen como ecuaciones de Euler y se expresan matemáticamente como:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{N} \quad (2.122)$$

donde  $\mathbf{N}$  es el torque externo aplicado al cuerpo. En el sistema de ejes principales, en el que el tensor de inercia está dado por la Ec. (2.119), siendo los momentos principales de inercia independientes del tiempo, y teniendo en cuenta la Ec. (2.117), las ecuaciones

de Euler toman la forma:

$$A\dot{\omega}_1 + (C - B)\omega_2\omega_3 = N_1 \quad (2.123a)$$

$$B\dot{\omega}_2 + (A - C)\omega_1\omega_3 = N_2 \quad (2.123b)$$

$$C\dot{\omega}_3 + (B - A)\omega_1\omega_2 = N_3 \quad (2.123c)$$

De forma análoga al problema de los dos cuerpos, cuando el movimiento de rotación libre, esto es  $\mathbf{N} = \mathbf{0}$ , el sistema de ecuaciones (2.123) admite solución analítica. En tal caso, las ecuaciones anteriores toman la forma:

$$A\dot{\omega}_1 + (C - B)\omega_2\omega_3 = 0 \quad (2.124a)$$

$$B\dot{\omega}_2 + (A - C)\omega_1\omega_3 = 0 \quad (2.124b)$$

$$C\dot{\omega}_3 + (B - A)\omega_1\omega_2 = 0 \quad (2.124c)$$

Así planteado, la solución de este problema involucra el cálculo de integrales elípticas. Por otro lado, el mismo se ve enormemente simplificado si se considera, por ejemplo, el caso  $A = B$ . Por supuesto, las soluciones analíticas obtenidas en los dos casos antes mencionados pueden usarse para aplicar el método de variación de parámetros y así obtener una solución para el caso del movimiento forzado (esto es  $\mathbf{N} \neq \mathbf{0}$ ). Sin embargo, por simplicidad, en este trabajo se va a conservar el punto de vista “newtoniano”.

Las componentes del torque en el sistema móvil pueden obtenerse de la siguiente manera. La  $j$ -ésima componente de la fuerza generalizada  $Q_j$ , correspondiente a la coordenada generalizada  $q_j$ , se define mediante:

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad (2.125)$$

donde  $\mathbf{F}_i$  es la fuerza sobre la partícula  $i$ -ésima, cuyo radio vector es  $\mathbf{r}_i$  y la sumatoria se extiende a todas las partículas. Ahora bien, puede demostrarse que:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \quad (2.126)$$

donde  $\mathbf{v}_i$  es la velocidad de la partícula  $i$ -ésima y  $\dot{q}_j$  se conoce como la velocidad generalizada, asociada a la coordenada  $q_j$ . En el sistema móvil (ligado al cuerpo), la velocidad de cada punto es:

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i \quad (2.127)$$

Luego, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i) = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} \times \mathbf{r}_i + \boldsymbol{\omega}_j \times \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \quad (2.128)$$

Las ligaduras a las que están sujetas las partículas que componen un cuerpo rígido son de tipo holónomas y están dadas por

$$\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k\|^2 - r_{ik}^2 = 0,$$

donde  $r_{ik}$  es la distancia entre cada par de partículas. Cada uno de los índices  $i$  y  $k$  etiquetan a todas ellas. Dado que las ligaduras holónomas son funciones solamente de las coordenadas generalizadas, la derivada de  $\mathbf{r}_i$  respecto de la velocidad generalizada  $\dot{q}_j$  es evidentemente nula y, por lo tanto:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i) = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} \times \mathbf{r}_i, \quad (2.129)$$



con lo que la fuerza generalizada resulta:

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \left( \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} \times \mathbf{r}_i \right) = \sum_i (\mathbf{F}_i \times \mathbf{r}_i) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j}. \quad (2.130)$$

En la última igualdad se ha utilizado la propiedad cíclica del producto mixto. Evidentemente, el factor entre paréntesis en la Ec. (2.130) es el torque sobre la partícula  $i$ -ésima ( $\mathbf{N}_i$ ). Por otro lado, si bien se ha agregado el subíndice  $i$  a la velocidad angular, debe tenerse presente que ésta es la misma para todas las partículas. Por lo tanto, puede escribirse:

$$Q_j = \mathbf{N} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{q}_j}, \quad (2.131)$$

donde  $\mathbf{N} = \sum_i \mathbf{N}_i$  es el torque total. Por supuesto, en el caso aquí estudiado, se tiene  $\dot{q}_j = \dot{\Omega}, \dot{\varepsilon}, \dot{\theta}$ . Teniendo en cuenta la expresión de las componentes de la velocidad angular en el sistema móvil —dada por la Ec. (2.121)— fácilmente se obtiene:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\theta}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\Omega}} = \begin{pmatrix} \sin \varepsilon \sin \theta \\ \sin \varepsilon \cos \theta \\ \cos \varepsilon \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.132)$$

En consecuencia:

$$Q_\Omega = N_1 \sin \varepsilon \sin \theta + N_2 \sin \varepsilon \cos \theta + N_3 \cos \varepsilon \quad (2.133a)$$

$$Q_\varepsilon = N_1 \cos \theta - N_2 \sin \theta \quad (2.133b)$$

$$Q_\theta = N_3. \quad (2.133c)$$

Este último es un sistema de ecuaciones lineales en las componentes del torque, el cual puede resolverse para las mismas, con lo que se obtiene:

$$N_1 = (Q_\Omega - Q_\theta \cos \varepsilon) \frac{\sin \theta}{\sin \varepsilon} + Q_\varepsilon \cos \theta \quad (2.134a)$$

$$N_2 = (Q_\Omega - Q_\theta \cos \varepsilon) \frac{\cos \theta}{\sin \varepsilon} - Q_\varepsilon \sin \theta \quad (2.134b)$$

$$N_3 = Q_\theta. \quad (2.134c)$$

Como puede verse, esta última expresión de las componentes del torque en el sistema móvil es general, dado que no se ha hecho ninguna suposición acerca del origen de las fuerzas generalizadas. Éstas podrían provenir de un potencial que dependa solamente de las coordenadas o, quizás también de las velocidades o bien de cualquier otra fuente.

Dependiendo del tipo de estudio que se lleve a cabo, podrá prescindirse de una o dos de las Ecs. (2.123). Por ejemplo, si el objetivo es estudiar la evolución rotacional de un planeta debido a las mareas y a los términos de deformación permanente de su figura, atendiendo a las probabilidades de captura en resonancias espín-órbita, dado que por lo general las velocidades de precesión y de nutación son mucho menores que la de rotación propia, entonces será suficiente considerar la Ec. (2.124c). En consecuencia, si se desprecian  $\dot{\Omega}$  y  $\dot{\varepsilon}$  frente a  $\dot{\theta}$ , se tiene que  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son prácticamente nulas y la Ec. (2.124c) puede reescribirse como:

$$\ddot{\theta} = \frac{Q_\theta}{C}, \quad (2.135)$$

que es precisamente la ecuación de movimiento considerada en muchos trabajos acerca de la dinámica rotacional de Mercurio (Makarov, 2012; Noyelles *et al.*, 2014) o también en otros estudios sobre la estimación del estado rotacional de exoplanetas (Makarov *et al.*, 2012; Makarov *et al.*, 2018) y más recientemente en la extensión del formalismo de Darwin-Kaula al caso de la libración en longitud (Frouard y Efroimsky, 2017; Efroimsky, 2018).

## 2.2. Expansión del potencial perturbador y desarrollo del formalismo de Darwin-Kaula

### 2.2.1. Potencial perturbador

Considérese, en primer lugar, un conjunto de  $N$  partículas, cada una de masa  $m_k$  ( $k = 0, 1, \dots, N$ ) y cuyo vector de posición respecto de un sistema de referencia inercial es  $\boldsymbol{\rho}_k$ , que interactúan solamente a través del campo gravitatorio generado por ellas mismas. Las ecuaciones de movimiento de dicho sistema son:

$$m_k \ddot{\boldsymbol{\rho}}_k = G m_k \sum_{j \neq k} m_j \frac{\mathbf{r}_{kj}}{r_{kj}^3}, \quad (2.136)$$

donde  $\mathbf{r}_{kj} = \boldsymbol{\rho}_j - \boldsymbol{\rho}_k$  y  $r_{kj} = \|\mathbf{r}_{kj}\|$  ( $k, j = 1, 2, \dots, N$ ). Ahora bien, va a resultar conveniente reescribir las ecuaciones de movimiento respecto de uno de los cuerpos, al que se lo denominará primario (que no necesariamente es el más masivo). Sea, entonces,  $\boldsymbol{\rho}_0$  su vector de posición y sean, en consecuencia  $\mathbf{r}_k \equiv \mathbf{r}_{0k} = \boldsymbol{\rho}_k - \boldsymbol{\rho}_0$ , los vectores de posición de las demás partículas respecto del primario.

En virtud de la Ec. (2.136), se tiene, por un lado:

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}}_k = G \sum_{j \neq k, 0} m_j \frac{\mathbf{r}_{kj}}{r_{kj}^3} + G m_0 \frac{\mathbf{r}_{k0}}{r_{k0}^3} \quad (2.137)$$

y, por otro lado:

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}}_0 = G \sum_{j \neq k, 0} m_j \frac{\mathbf{r}_{0j}}{r_{0j}^3} + G m_0 \frac{\mathbf{r}_{0k}}{r_{0k}^3} \quad (2.138)$$

La diferencia entre las Ecs. (2.137) y (2.138) da como resultado:

$$\ddot{\mathbf{r}}_k = -G(m_0 + m_k) \frac{\mathbf{r}_k}{r_k^3} + G \sum_{j \neq i, 0} m_j \left[ \frac{\mathbf{r}_{kj}}{r_{kj}^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \right] \quad (2.139)$$

El lado derecho de la Ec. (2.139) puede escribirse como el gradiente de un potencial escalar  $U_k$ , esto es  $\ddot{\mathbf{r}}_k = -\nabla U_k$ , el cual está dado por:

$$U_k = -G \frac{(m_0 + m_k)}{r_k} + W_k \quad (2.140)$$

donde:

$$W_k = -G \sum_{j \neq k} m_j \left[ \frac{1}{r_{kj}} - \frac{\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_j}{r_j^3} \right] \quad (2.141)$$

En otras palabras, el potencial  $U_k$  está dado por la suma del ya conocido término central, que corresponde al primer término de la Ec. (2.140), y el llamado potencial perturbador  $W_k$ . Luego, la Ec. (2.139) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\ddot{\mathbf{r}}_k = -G(m_0 + m_k) \frac{\mathbf{r}_k}{r_k^3} - \nabla W_k \quad (2.142)$$

Esta expresión indica que la aceleración aplicada a la partícula  $k$  se compone de la aceleración debida a la atracción por parte del primario y aquella debida a los términos perturbativos.

Los términos de la expresión entre corchetes en el lado derecho de la Ec. (2.141) pueden expandirse en función de los polinomios de Legendre. Esto es, por un lado se tiene:

$$\frac{1}{r_{kj}} = \frac{1}{r_{>}} \sum_{l=1}^{\infty} \left( \frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^l P_l(\cos \psi_{kj}) \quad (2.143)$$

donde  $r_{<} = r_k$  y  $r_{>} = r_j$  si  $r_k < r_j$ , y  $r_{<} = r_j$  y  $r_{>} = r_k$  si  $r_k > r_j$ . Además,  $\psi_{kj}$  es el ángulo que forman los vectores de posición  $\mathbf{r}_k$  y  $\mathbf{r}_j$ . Por otro lado, se tiene:

$$\frac{\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_j}{r_j^3} = \frac{r_k r_j \cos \psi_{kj}}{r_j^3} = \frac{r_k}{r_j^2} P_1(\cos \psi_{kj}) \quad (2.144)$$

Luego, el potencial perturbador  $W_k$  queda expresado como:

$$W_k = -G \sum_{j \neq k} m_j \left[ \frac{1}{r_{>}} \sum_{l=1}^{\infty} \left( \frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^l P_l(\cos \psi_{kj}) - \frac{r_k}{r_j^2} P_1(\cos \psi_{kj}) \right] \quad (2.145)$$

Por supuesto, la utilización del ángulo  $\psi_{kj}$  no resultará muy útil en el desarrollo subsiguiente, por lo que será más conveniente escribir la expresión completa del potencial  $W_k$  en función de las coordenadas esféricas, lo cual se logra a través de la utilización de las funciones asociadas de Legendre ( $P_{lm}(x)$ ):

$$P_l(\cos \psi_{kj}) = \sum_{m=0}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) P_{lm}(\sin \varphi_k) P_{lm}(\sin \varphi_j) \cos [m(\lambda_k - \lambda_j)] \quad (2.146)$$

donde  $\delta_{0m}$  es la delta de Kronecker,  $\varphi$  es la latitud y  $\lambda$  es la longitud. En consecuencia, la Ec. (2.145) puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} W_k = -G \sum_{j \neq k} m_j & \left[ \frac{1}{r_{>}} \sum_{l=1}^{\infty} \left( \frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^l \sum_{m=0}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) \right. \\ & \times P_{lm}(\sin \varphi_k) P_{lm}(\sin \varphi_j) \cos [m(\lambda_k - \lambda_j)] \\ & \left. - \frac{r_k}{r_j^2} \sum_{m=0}^1 \frac{(1-m)!}{(1+m)!} (2 - \delta_{0m}) P_{1m}(\sin \varphi_k) P_{1m}(\sin \varphi_j) \cos [m(\lambda_k - \lambda_j)] \right] \quad (2.147) \end{aligned}$$

El primer paso para el desarrollo de la teoría de Darwin-Kaula, que es la base fundamental sobre la que construimos nuestro formalismo, consiste en la transformación de coordenadas rectangulares o esféricas a elementos orbitales considerados como un sistema de coordenadas en sí mismo. Esto es posible dado que el estado dinámico de una partícula queda determinado dando seis cantidades, estas son las tres componentes del

vector de posición y las correspondientes tres componentes del vector de velocidad de la misma. Luego, en virtud de los resultados del problema de los dos cuerpos —o problema de Kepler, en particular— puede definirse la transformación entre las componentes de la posición y la velocidad de la partícula y los elementos orbitales que serán los parámetros que definen la orientación en el espacio, forma y tamaño de la órbita, y la posición en la misma de la partícula considerada.

En virtud del teorema de suma (o diferencia) de ángulos, se tiene:

$$\cos [m(\lambda_k - \lambda_j)] = \cos (m\lambda_k) \cos (m\lambda_j) + \sin (m\lambda_k) \sin (m\lambda_j) \quad (2.148)$$

Insertando esta expresión en la Ec. (2.147) se obtienen términos del tipo:

$$r^\nu P_{lm}(\sin \varphi) \begin{bmatrix} \cos (m\lambda) \\ \sin (m\lambda) \end{bmatrix}; \text{ donde } \nu = \begin{cases} -(l+1) \\ l \end{cases} \quad (2.149)$$

los cuales pueden reescribirse de forma más sencilla como:

$$r^\nu P_{lm}(\sin \varphi) \exp [i m \lambda], \quad (2.150)$$

donde  $i = \sqrt{-1}$ .

La transformación a elementos orbitales de los términos dados por la Ec. (2.149), que en definitiva son los términos que componen el potencial perturbador, fue obtenida por [Kaula \(1961\)](#). Dada la complejidad de la deducción, aquí solamente se presenta el resultado final de la misma en forma de dos transformaciones consecutivas:

$$\begin{aligned} P_{lm}(\sin \varphi) \exp [i m(\alpha - \varOmega)] &= \sum_{p=0}^l F_{lmp}(i) \begin{bmatrix} \exp [i(l-2p)(\omega + f)] \\ \exp [-i(l-2p)(\omega + f)] \end{bmatrix} \begin{matrix} l-m \text{ par} \\ l-m \text{ impar} \end{matrix} \\ &= \sum_{p=0}^l F_{lmp}(i) \exp [i(l-2p)(\omega + f) + i\phi_{lm}] \end{aligned} \quad (2.151)$$

y

$$r^\nu \exp [i(l-2p)f] = a^\nu \sum_{q=-\infty}^{\infty} X_{l-2p+q}^{\nu, l-2p}(e) \exp [i(l-2p+q)M] \quad (2.152)$$

donde  $a$  es el semieje mayor,  $e$  es la excentricidad,  $i$  es la inclinación del plano de la órbita,  $\omega$  es el argumento del periastro,  $\varOmega$  es la longitud del nodo ascendente,  $f$  y  $M$  son las anomalías verdadera y media, respectivamente y  $\alpha$  es la ascensión recta. Además,  $F_{lmp}(i)$  son las funciones de la inclinación,  $X_{l-2p+q}^{\nu, l-2p}(e)$  son los coeficientes de Hansen y las fases suplementarias  $\phi_{lm}$  están dadas por:

$$\phi_{lm} = \left[ (-1)^{l-m} - 1 \right] \frac{\pi}{4} \quad (2.153)$$

La sustitución de las Ecs. (2.151) y (2.152) en la Ec. (2.150) no es tan directa como puede parecer. Antes de tal procedimiento, han de considerarse por separado los tres tipos de perturbaciones mencionados en la introducción, estas son: por un lado, las perturbaciones planetarias, es decir aquellas originadas por la presencia de otros cuerpos además del primario y el secundario considerado, y, por otro lado, las perturbaciones mareales y “triaxiales”, cuya causa se encuentra en la consideración de la forma de los cuerpos celestes que componen el sistema planetario estudiado y en que dicha forma consta de una parte constante en el tiempo (la parte triaxial, que describe

la distribución interna fija de masa del cuerpo) y otra dependiente del tiempo (la parte mareal) que tiene en cuenta la deformación debida a la atracción gravitatoria por parte de los demás miembros del sistema. A continuación, se van a obtener las expresiones del potencial perturbador correspondientes a cada tipo de perturbación antes mencionado, imponiendo las restricciones que sean necesarias a lo largo de esta construcción teórica.

### 2.2.2. Perturbaciones planetarias

Se comienza por este tipo de perturbación dado que es el que se puede desarrollar de forma más directa teniendo en cuenta la manera en que se introdujo el potencial perturbador al principio de esta sección.

Dada la naturaleza del sistema de referencia aquí considerado, se tiene que  $\lambda = \alpha$ , esto es, la longitud de la partícula considerada coincide con su ascensión recta. Por lo tanto, para poder reemplazar las Ecs. (2.151) y (2.152) en la Ec. (2.150), se debe escribir  $\lambda = \alpha - \delta\lambda + \delta\lambda$ . En consecuencia, se tiene:

$$\begin{aligned} r^\nu P_{lm}(\sin \varphi) \exp[i m \lambda] &= r^\nu P_{lm}(\sin \varphi) \exp[i m (\alpha - \delta\lambda)] \exp[i m \delta\lambda] \\ &= r^\nu \exp[i m \delta\lambda] \sum_{p=0}^l F_{lmp}(i) \exp[i(l-2p)(\omega + f) + i\phi_{lm}] \\ &= a^\nu \sum_{p=0}^l F_{lmp}(i) \sum_{q=-\infty}^{\infty} X_{l-2p+q}^{\nu, l-2p}(e) \exp[i(v_{lmpq} + \phi_{lm})] \end{aligned} \quad (2.154)$$

donde  $v_{lmpq} = (l-2p)\omega + (l-2p+q)M + m\delta\lambda$ . De esta forma, la Ec. (2.154) define la transformación de coordenadas esféricas a elementos orbitales que se debe aplicar a la Ec. (2.147). Tal como puede verse en dicha ecuación, pueden distinguirse dos tipos de términos, por un lado se encuentran aquellos para los cuales  $r_k > r_j$ , que pueden llamarse *términos perturbativos interiores*, y por otro lado aquellos para los cuales se cumple la condición inversa, es decir  $r_k < r_j$ , denominados *términos perturbativos exteriores* (Murray y Dermott, 1999). En virtud de lo indicado a continuación de la Ec. (2.143), se tiene para el primer tipo de términos:

$$\begin{aligned} W_k^{(\text{int})} &= -G \sum_{j=1}^{k-1} m_j \left[ \sum_{l=1}^{\infty} r_j^l r_k^{-(l+1)} \sum_{m=0}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) \right. \\ &\quad \times P_{lm}(\sin \varphi_k) P_{lm}(\sin \varphi_j) \cos[m(\lambda_k - \lambda_j)] \\ &\quad \left. - r_k r_j^{-2} \sum_{m=0}^1 \frac{(1-m)!}{(1+m)!} (2 - \delta_{0m}) P_{1m}(\sin \varphi_k) P_{1m}(\sin \varphi_j) \cos[m(\lambda_k - \lambda_j)] \right] \end{aligned} \quad (2.155)$$

y para el segundo tipo:

$$\begin{aligned} W_k^{(\text{ext})} &= -G \sum_{j=k+1}^N m_j \sum_{l=2}^{\infty} r_k^l r_j^{-(l+1)} \sum_{m=0}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) \\ &\quad \times P_{lm}(\sin \varphi_k) P_{lm}(\sin \varphi_j) \cos[m(\lambda_k - \lambda_j)] \end{aligned} \quad (2.156)$$

Por supuesto, debe tenerse en cuenta que si  $k = 1$ , entonces el potencial perturbador planetario solamente contendrá términos del segundo tipo; mientras que si  $k = N$ , dicho potencial solamente tendrá términos del primer tipo.

Considerando nuevamente las Ecs. (2.148) y (2.149), se aplica la transformación definida por la Ec. (2.154) para las coordenadas correspondientes a cada partícula ( $k$  y  $j$ ) y luego de algunas operaciones algebraicas se obtiene para cada tipo de término, respectivamente:

$$\begin{aligned}
 W_k^{(p,int)} = & -G \sum_{j=1}^{k-1} m_j \left[ \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_j^l}{a_k^{l+1}} \sum_{m=0}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) \sum_{p=0}^l F_{lmp}(i_j) \sum_{q=-\infty}^{\infty} X_{l-2p+q}^{l,l-2p}(e_j) \right. \\
 & \times \sum_{h=0}^l F_{lmh}(i_k) \sum_{s=-\infty}^{\infty} X_{l-2h+s}^{-(l+1),l-2p}(e_k) \cos(v_{lmpq}^j - v_{lmhs}^k) \\
 & - \frac{a_k}{a_j^2} \sum_{m=0}^1 \frac{(1-m)!}{(1+m)!} (2 - \delta_{0m}) \sum_{p=0}^1 F_{1mp}(i_k) \sum_{q=-\infty}^{\infty} X_{1-2p+q}^{1,1-2p}(e_k) \\
 & \left. \times \sum_{h=0}^1 F_{1mh}(i_j) \sum_{s=-\infty}^{\infty} X_{1-2h+s}^{-2,1-2h}(e_j) \cos(v_{1mpq}^k - v_{1mhs}^j) \right] \quad (2.157)
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 W_k^{(p,ext)} = & -G \sum_{j=k+1}^N m_j \sum_{l=2}^{\infty} \frac{a_k^l}{a_j^{l+1}} \sum_{m=0}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) \sum_{p=0}^l F_{lmp}(i_k) \sum_{q=-\infty}^{\infty} X_{l-2p+q}^{l,l-2p}(e_k) \\
 & \times \sum_{h=0}^l F_{lmh}(i_j) \sum_{s=-\infty}^{\infty} X_{l-2h+s}^{-(l+1),l-2p}(e_j) \cos(v_{lmpq}^k - v_{lmhs}^j) \quad (2.158)
 \end{aligned}$$

### 2.2.3. Perturbaciones mareales

Considérese nuevamente la Ec. (2.147) en la cual  $\mathbf{r}_k = (r_k, \lambda_k, \varphi_k)$  corresponde a un punto de la superficie del primario, esto es:  $\mathbf{r}_k = \mathbf{R} = (R, \lambda, \varphi)$ , el cual se considera ahora como un cuerpo esférico de radio medio  $R$ . Entonces, el potencial perturbador en dicho punto de la superficie del primario, debido a la presencia de cada partícula en sus respectivas posiciones  $\mathbf{r}_j$ , está dado por:

$$\begin{aligned}
 W^{(m)}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_j) = & -G \sum_{j=1}^N m_j \sum_{l=2}^{\infty} R^l r_j^{-(l+1)} \sum_{m=0}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) \\
 & \times P_{lm}(\sin \varphi) P_{lm}(\sin \varphi_j) \cos[m(\lambda - \lambda_j)] \quad (2.159)
 \end{aligned}$$

dado que es siempre  $R < r_j$ . Ahora bien, antes de llevar a cabo la conversión a elementos orbitales, se debe tener en cuenta que se han de incluir las coordenadas que fijan el estado rotacional del primario. Pero como en nuestro desarrollo teórico se considerará solamente el caso en que el eje de rotación del primario es siempre perpendicular al plano de referencia, la única coordenada a incluir es su ángulo de rotación ( $\theta$ ), magnitud que mide el desplazamiento angular de un meridiano de referencia fijo en el primario con respecto a una dirección fija en el espacio de referencia inercial. Luego, no es difícil deducir que la longitud de la partícula  $j$ , aquella que genera la perturbación en el punto  $\mathbf{R}$ , está dada por  $\lambda_j = \alpha_j - \theta$ . Por lo tanto, y de forma totalmente análoga al caso de las perturbaciones de origen planetario, el próximo paso consiste en escribir:

$\lambda_j = \alpha_j - \delta\mathcal{L}_j + \delta\mathcal{L}_j - \theta$ , con lo cual la transformación a elementos orbitales de la partícula  $j$  queda definida mediante la fórmula:

$$\begin{aligned}
 r_j^\nu P_{lm}(\sin \varphi_j) \exp [i m \lambda_j] &= r_j^\nu P_{lm}(\sin \varphi_j) \exp [i m (\alpha_j - \delta\mathcal{L}_j)] \exp [i m (\delta\mathcal{L}_j - \theta)] \\
 &= r_j^\nu \exp [i m (\delta\mathcal{L}_j - \theta)] \\
 &\quad \times \sum_{p=0}^l F_{lmp}(i_j) \exp [i(l-2p)(\omega_j + f_j) + i\phi_{lm}] \\
 &= a_j^\nu \sum_{p=0}^l F_{lmp}(i_j) \\
 &\quad \times \sum_{q=-\infty}^{\infty} X_{l-2p+q}^{\nu, l-2p}(e_j) \exp [i(v_{lmpq}^j - m\theta + \phi_{lm})]
 \end{aligned} \tag{2.160}$$

donde, en este caso,  $\nu = -(l+1)$ . Luego, el potencial perturbador considerado en esta subsección queda expresado como:

$$\begin{aligned}
 W^{(M)}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_j) &= -G \sum_{j=1}^N m_j \sum_{l=2}^{\infty} \frac{R^l}{a_j^{l+1}} \sum_{m=0}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) P_{lm}(\sin \phi) \\
 &\quad \times \sum_{p=0}^l F_{lmp}(i_j) \sum_{q=-\infty}^{\infty} X_{l-2p+q}^{-(l+1), l-2p}(e_j) \cos [v_{lmpq}^j - m(\lambda + \theta) + \phi_{lm}]
 \end{aligned} \tag{2.161}$$

Esta última ecuación puede reescribirse de forma más conveniente como:

$$W^{(M)}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_j) = \sum_{j=1}^N \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} W_{j,lmpq}^{(M)}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_j) \tag{2.162}$$

donde cada término está dado por:

$$\begin{aligned}
 W_{j,lmpq}^{(M)}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_j) &= -G m_j \frac{R^l}{a_j^{l+1}} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) P_{lm}(\sin \phi) \\
 &\quad \times F_{lmp}(i_j) X_{l-2p+q}^{-(l+1), l-2p}(e_j) \cos [v_{lmpq}^j - m(\lambda + \theta) + \phi_{lm}]
 \end{aligned} \tag{2.163}$$

El gradiente del potencial dado por la Ec. (2.161) es proporcional a la fuerza resultante aplicada en el punto  $\mathbf{R}$  del primario y, tal como puede preverse, dicha fuerza es capaz de deformar al mismo con lo que, a su vez, cambia su potencial gravitatorio. Como consecuencia de esto último, cada cuerpo secundario va a sufrir una aceleración extra producto de la deformación que cada uno de ellos produce en el cuerpo primario. Puede pensarse, entonces, que dicha deformación genera un potencial gravitatorio adicional a aquél originado por el primario (considerado como una distribución espacial de masa), comúnmente conocido como *potencial de mareas*. Además, dado que los materiales que constituyen los cuerpos celestes (estrellas, planetas, satélites, etc.) no son perfectamente elásticos —ni perfectamente rígidos, por lo señalado anteriormente— sino que presentan cierto grado de anelasticidad (tal como la viscoelasticidad, entre otros tipos) ocurre entonces que dichos materiales disipan energía, esto es, parte de la



energía disponible en el sistema se convierte en energía de deformación, la cual luego puede transformarse en energía térmica del primario.

En virtud, entonces, de lo indicado en el párrafo anterior, es necesario incluir dos suposiciones que son de fundamental importancia en la teoría de Darwin-Kaula y que se enmarcan dentro de lo que se conoce como el *régimen lineal*. La primera de éstas consiste en suponer que la relación entre esfuerzos y deformaciones es lineal, es decir, los esfuerzos son proporcionales a las deformaciones. La segunda, en cambio, consiste en suponer que cada término del potencial gravitatorio adicional del primario  $V^{(M)}$  —o del cuerpo deformado, en general—, escrito de forma análoga a la Ec. (2.162) y medido en un punto  $\mathbf{r}$  del espacio (colineal con  $\mathbf{R}$ , siendo  $r > R$ ), es proporcional al correspondiente término del potencial perturbador, dado por la Ec. (2.163), es decir:

$$V_{j,lmq}^{(M)}(\mathbf{r}) = k_l \left( \frac{R}{r} \right)^{l+1} W_{j,lmq}^{(M)}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_j), \quad (2.164)$$

donde  $k_l$  es el número de Love. En la expresión anterior se tiene en cuenta que el potencial gravitatorio del primario debe decrecer como  $r^{-(l+1)}$ , en virtud de la teoría potencial. Reemplazando la expresión de  $W_{j,lmq}^{(M)}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_j)$  dada por la Ec. (2.163) en la Ec. (2.164) se obtiene:

$$V_{j,lmq}^{(M)}(\mathbf{r}) = -G m_j k_l \frac{R^{2l+1}}{a_j^{l+1}} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) F_{lm}(i_j) X_{l-2p+q}^{-(l+1),l-2p}(e_j) \\ \times r^{-(l+1)} P_{lm}(\sin \phi) \cos [v_{lmq}^j - m(\lambda + \theta) + \phi_{lm}] \quad (2.165)$$

Por supuesto, el paso siguiente será aplicar nuevamente la transformación dada por la Ec. (2.160) a las coordenadas esféricas del punto  $\mathbf{r}$  el cual, como se indicó anteriormente, es un punto genérico del espacio donde se mide el potencial; pero antes de llevar a cabo dicha transformación, resulta conveniente asociar las coordenadas mencionadas a las de la partícula  $k$ . De esta forma, el potencial  $W_{kj,lmq}^{(M)} = V_{j,lmq}^{(M)}(\mathbf{r}_k)$  se interpreta como el potencial que perturba el movimiento de aquella partícula. Entonces, de forma análoga a la transformación de las coordenadas de la partícula  $j$ , se tiene  $\lambda_k = \alpha_k - \theta = \alpha_k - \Omega_k + \Omega_k - \theta$ . Ahora sí, aplicando la Ec. (2.160) para las coordenadas de  $\mathbf{r}_k$ , se tiene como resultado:

$$W_k^{(M)} = -G \sum_{j=1}^N m_j \sum_{l=2}^{\infty} \frac{R^{2l+1}}{(a_k a_j)^{l+1}} \sum_{m=0}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) \\ \times \sum_{p=0}^l F_{lm}(i_j) \sum_{q=-\infty}^{\infty} X_{l-2p+q}^{-(l+1),l-2p}(e_j) \sum_{h=0}^l F_{lmh}(i_k) \sum_{s=-\infty}^{\infty} X_{l-2h+s}^{-(l+1),l-2p}(e_k) \\ \times k_l \cos [(v_{lmq}^j - m\theta) - (v_{lmhs}^k - m\theta)] \quad (2.166)$$

Se debe hacer una observación muy importante a la Ec. (2.166) que resulta clave dentro del formalismo de Darwin-Kaula de la teoría de mareas. Tal como puede notarse en la misma, la respuesta del planeta, reflejada en la expresión del potencial perturbador  $W_k^{(M)}$  —asociado al potencial adicional del primario deformado—, es instantánea; esto es, el movimiento de la partícula  $k$  se ve afectado, en cada instante de tiempo, de forma inmediata por la deformación del primario debido a la fuerza neta que ejercen sobre el mismo la partícula  $k$  y las demás, en ese mismo instante de tiempo. En realidad, debido



a la anelasticidad del material que compone al primario (considerado como un todo), ocurre que dicha respuesta está siempre desfasada de la correspondiente excitación, que no es otra cosa que las fuerzas que deforman al mismo, las cuales se derivan del potencial  $W^{(M)}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_j)$ . Esto es, en cada instante de tiempo, el potencial  $W^{(M)}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_j)$  define el estado de tensiones que deforma al primario, el cual tarda cierto intervalo  $\Delta t$  en alcanzar la nueva configuración de equilibrio, es decir, la forma correspondiente a una superficie equipotencial del potencial mencionado, consistente con las dimensiones del mismo. En consecuencia, la perturbación sufrida por la partícula  $k$ , en un instante  $t$  dado, será debida al potencial  $W_k^{(M)}$  correspondiente a la configuración de equilibrio alcanzada en el instante anterior  $t - \Delta t$ . Por lo tanto, la Ec. (2.166) deberá reescribirse como:

$$\begin{aligned}
 W_k^{(M)}(\mathbf{r}, t) = & -G \sum_{j=1}^N m_j \sum_{l=2}^{\infty} \frac{R^{2l+1}}{(a_k a_j)^{l+1}} \sum_{m=0}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) \\
 & \times \sum_{p=0}^l F_{lmp}(i_j) \sum_{q=-\infty}^{\infty} X_{l-2p+q}^{-(l+1), l-2p}(e_j) \sum_{h=0}^l F_{lmh}(i_k) \sum_{s=-\infty}^{\infty} X_{l-2h+s}^{-(l+1), l-2p}(e_k) \\
 & \times k_l \cos [(v_{lmpq}^j(t - \Delta t) - m\theta(t - \Delta t)) - (v_{lmhs}^k(t) - m\theta(t))] \quad (2.167)
 \end{aligned}$$

Tal como puede verse, es por el motivo explicado anteriormente que no se cancelan mutuamente los términos  $m\theta$  en la Ec. (2.166).

Siguiendo a [Efroimsky y Williams \(2009\)](#) se tiene:

$$\begin{aligned}
 v_{lmpq}^j(t - \Delta t) - m\theta(t - \Delta t) &= v_{lmpq}^j(t) - m\theta(t) - [\dot{v}_{lmpq}^j - m\dot{\theta}] \Delta t \\
 &= v_{lmpq}^j(t) - m\theta(t) - \omega_{lmpq} \Delta t \quad (2.168)
 \end{aligned}$$

donde, por supuesto:

$$\omega_{lmpq} = (l - 2p)\dot{\omega} + (l - 2p + q)\dot{M} + m(\dot{\mathcal{S}} - \dot{\theta}) \quad (2.169)$$

Si se definen las cantidades  $\epsilon_{lmpq}$  como:

$$\epsilon_{lmpq} = \omega_{lmpq} \Delta t \quad (2.170)$$

la Ec. (2.168) pueden reescribirse de la siguiente manera:

$$v_{lmpq}^j(t - \Delta t) - m\theta(t - \Delta t) = v_{lmpq}^j(t) - m\theta(t) - \epsilon_{lmpq} \quad (2.171)$$

donde las cantidades  $\epsilon_{lmpq}$  son los desfases angulares entre el potencial que deforma al primario y el potencial adicional del mismo ya deformado. Ahora bien, la Ec. (2.170) puede, a su vez, reescribirse como:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{lmpq} &= \omega_{lmpq} \Delta t \\
 &= |\omega_{lmpq}| \operatorname{sgn}(\omega_{lmpq}) \Delta t \\
 &= \chi_{lmpq} \operatorname{sgn}(\omega_{lmpq}) \Delta t \quad (2.172)
 \end{aligned}$$

Resulta necesario detenerse en este punto para discutir acerca de varios aspectos subyacentes en la Ec. (2.172). Por un lado, no es difícil ver que las cantidades definidas positivas  $\chi_{lmpq}$  no son otra cosa que las frecuencias físicas (reales) a las que oscilan las

tensiones que deforman al primario. Por otro lado, y tal como se indicó anteriormente, el origen de los desfases angulares se encuentra en la anelasticidad propia de los materiales que componen los cuerpos celestes, por lo tanto,  $\Delta t$  depende de la reología de aquellos, es decir, de cómo responden los mismos antes las fuerzas que los deforman; más específicamente, de las amplitudes y las frecuencias de dichas tensiones. Tal como está escrita la Ec. (2.172), parece que el valor de  $\Delta t$  es el mismo para cada término del potencial  $W_k^{(M)}$ , lo cual está en contradicción con lo indicado anteriormente; en consecuencia, la ecuación antes mencionada deberá expresarse como:

$$\epsilon_{lmpq} = \chi_{lmpq} \operatorname{sgn}(\omega_{lmpq}) \Delta t_{lmpq} \quad (2.173)$$

Pero, de inmediato surge la pregunta de cómo es esa dependencia. El primer paso para responderla es incluir otra suposición que forma parte de aquellas que son de fundamental importancia para el formalismo de Darwin-Kaula, la cual establece que la disipación a cada frecuencia depende solamente de esa misma frecuencia, es decir que se tiene, específicamente:

$$\Delta t_{lmpq} = \Delta t(\chi_{lmpq}) \quad (2.174)$$

Si bien se consideró necesario advertir aquí sobre esta problemática, los pasos subsiguientes necesarios para el tratamiento de la misma se realizarán en una sección posterior, puesto que en este momento el objetivo central sigue siendo la obtención del potencial de mareas.

Para cerrar esta subsección, se construirá a continuación una expresión del potencial de mareas que resultará más conveniente para su aplicación en problemas concretos que aquella dada por la Ec. (2.167). La Ec. (2.171), puede reemplazarse en la Ec. (2.167) y luego, en virtud del teorema de la suma y diferencia de ángulos, se llega a:

$$\begin{aligned} W_k^{(M)}(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_j^*, t) = & -G \sum_{j=1}^N m_j \sum_{l=2}^{\infty} \frac{R^{2l+1}}{(a_k a_j^*)^{l+1}} \sum_{m=0}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) \\ & \times \sum_{p=0}^l F_{lmp}(i_j^*) \sum_{q=-\infty}^{\infty} X_{l-2p+q}^{-(l+1), l-2p}(e_j^*) \sum_{h=0}^l F_{lmh}(i_k) \sum_{s=-\infty}^{\infty} X_{l-2h+s}^{-(l+1), l-2p}(e_k) \\ & \times [\cos[v_{lmpq}^{j,*} - m\theta^* - (v_{lmhs}^k - m\theta)] k_l \cos \epsilon_{lmpq} \\ & + [v_{lmpq}^{j,*} - m\theta^* - (v_{lmhs}^k - m\theta)] k_l \sin \epsilon_{lmpq}], \quad (2.175) \end{aligned}$$

donde se ha omitido la dependencia en el tiempo por razones de simplicidad. Los asteriscos se agregaron para hacer énfasis en el hecho de que los elementos orbitales de la partícula  $j$  corresponden al instante  $t - \Delta t$  donde ocurre la deformación que perturba a la partícula  $k$  en el instante  $t$ . Es importante tener esto en cuenta sobre todo cuando se considera el caso  $j = k$ , esto es, cuando se evalúa la perturbación mareal sobre dicha partícula debido a la deformación que la misma genera sobre el cuerpo central. En tal caso, se debe calcular el gradiente de  $W_k^{(M)}(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_j^*, t)$  con respecto a los elementos sin asterisco y luego, los que tienen asterisco se identifican con los anteriores para evaluar efectivamente la aceleración sobre la partícula  $k$ . Todo esto se analizará en detalle más adelante.

### 2.2.4. Perturbaciones debidas a una distribución inhomogénea y permanente de masa

La construcción del formalismo para incluir las perturbaciones debidas a una distribución inhomogénea y permanente de masa requiere el uso de una estrategia que se diferencia de las anteriores puesto que resulta necesario calcular primero el potencial gravitatorio debido a la distribución de masa considerada en el espacio externo a la misma. Para esto, considérese un sistema de referencia cuyo origen coincide con el centro de masa de aquella. Sean  $\mathbf{r}'$  el vector de posición de un elemento de masa  $dm$  de la distribución antes mencionada y  $\mathbf{r}$  el vector de posición de un punto arbitrario del espacio externo a aquella. Dicho elemento de masa puede escribirse como  $dm = \rho(\mathbf{r}')dV$ , donde  $\rho(\mathbf{r}')$  es la densidad en el punto considerado y  $dV$  es el elemento de volumen correspondiente. El potencial gravitatorio generado por este elemento, en el punto  $\mathbf{r}$ , será:

$$dU(\mathbf{r}) = -G \frac{\rho(\mathbf{r}') dV}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.176)$$

Luego, el potencial generado por toda la distribución será la suma de todos las contribuciones de cada elemento de masa, esto es:

$$U(\mathbf{r}) = -G \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV \quad (2.177)$$

En completa analogía con la Ec. (2.143), y considerando que  $|\mathbf{r}| = r > r' = |\mathbf{r}'|$ , se tiene:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos \psi) \quad \text{donde} \quad \cos \psi = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{rr'} \quad (2.178)$$

En función de las coordenadas esféricas de los puntos considerados, la Ec. (2.178) queda expresada como:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{r'}{r}\right)^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) P_{lm}(\sin \varphi) P_{lm}(\sin \varphi') \cos(\lambda - \lambda') \quad (2.179)$$

Reemplazando esta última ecuación en la Ec. (2.177) se obtiene:

$$U(\mathbf{r}) = -G \iiint_V \left( \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{r'}{r}\right)^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) \right. \\ \left. \times P_{lm}(\sin \varphi) P_{lm}(\sin \varphi') \cos(\lambda - \lambda') \right) \rho(\mathbf{r}') dV, \quad (2.180)$$

ecuación que puede reescribirse como:

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{G M_p}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{R}{r}\right)^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) \\ \times \left[ \frac{1}{M_p} P_{lm}(\sin \varphi) \cos(m\lambda) \iiint_V \left(\frac{r'}{R}\right)^l P_{lm}(\sin \varphi') \cos(m\lambda') \rho(\mathbf{r}') dV \right. \\ \left. + \frac{1}{M_p} P_{lm}(\sin \varphi) \sin(m\lambda) \iiint_V \left(\frac{r'}{R}\right)^l P_{lm}(\sin \varphi') \sin(m\lambda') \rho(\mathbf{r}') dV \right] \quad (2.181)$$

donde se han introducido la masa total  $M_p$  y el radio medio (equivolumétrico)  $R$  de la distribución considerada como factores de escala. Por supuesto,

$$M_p = \iiint_V \rho(\mathbf{r}') dV \quad (2.182)$$

Más aún, si se definen los *coeficientes del campo gravitatorio*,  $C_{lm}$  y  $S_{lm}$ , como:

$$\begin{bmatrix} C_{lm} \\ S_{lm} \end{bmatrix} = \frac{1}{M_p} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) \iiint_V \left( \frac{r'}{R} \right)^l P_{lm}(\sin \varphi') \begin{bmatrix} \cos(m\lambda) \\ \sin(m\lambda) \end{bmatrix} \rho(\mathbf{r}') dV, \quad (2.183)$$

la Ec. (2.181) queda expresada de forma más sencilla como:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}) &= -\frac{G M_p}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left( \frac{R}{r} \right)^l P_{lm}(\sin \varphi) [C_{lm} \cos(m\lambda) + S_{lm} \sin(m\lambda)] \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l U_{lm}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.184)$$

Conviene detenerse en este punto para realizar algunas observaciones. Considérese para ello la Ec. (2.183). En primer lugar, puede verse que para  $m = 0$ , se tiene:

$$C_{l0} = C_l = -J_l = \frac{1}{M_p} \iiint_V \left( \frac{r'}{R} \right)^l P_l(\sin \varphi') \rho(\mathbf{r}') dV \quad \text{y} \quad S_{l0} = 0$$

donde  $P_l(x) = P_{l0}$ . Los coeficientes  $C_l$  (o los  $J_l$ ) se llaman *zonales*; en particular, el coeficiente  $J_2$  se conoce como *factor de forma dinámico* en geodesia satelital. Continuando con esta clasificación, aquellos para los cuales  $l = m$  se llaman *sectoriales* y para aquellos para los que es  $l \neq m \neq 0$ , se denominan *teserales*. Por otro lado, para  $l = 0$  —lo cual implica que  $m = 0$ , tal como puede verse en la Ec. (2.184)— se obtiene:

$$C_{00} = \frac{1}{M_p} \iiint_V P_{00}(\sin \varphi') \rho(\mathbf{r}') dV$$

Pero, teniendo en cuenta la Ec. (2.182) y que  $P_{00}(x) = 1$ , se obtiene que  $C_{00} = 1$ . En consecuencia, el primer término de la serie de la Ec. (2.184) es:

$$U_{00} = -\frac{G M_p}{r} \quad (2.185)$$

Luego, la Ec. (2.184) puede escribirse como:

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{G M_p}{r} + W^{(\text{ccg})} \quad (2.186)$$

donde:

$$W^{(\text{ccg})} = -\frac{G M_p}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left( \frac{R}{r} \right)^l P_{lm}(\sin \varphi) [C_{lm} \cos(m\lambda) + S_{lm} \sin(m\lambda)] \quad (2.187)$$

Esto es, el potencial gravitatorio de la distribución de masa aquí considerada consta de un término central y otro perturbativo dado por la Ec. (2.187).

Considérense ahora los términos para los que  $l = 1$  y, por lo tanto,  $m = 0, 1$ . Se tiene, por un lado:

$$P_{10}(\sin \varphi') = \sin \varphi' \quad \text{y} \quad P_{10}(\sin \varphi') = (1 - \sin^2 \varphi') = \cos^2 \varphi' \quad (2.188)$$

y, por otro lado, las coordenadas cartesianas están dadas en función de las esféricas mediante:

$$\begin{cases} x' = r' \cos \varphi' \cos \lambda' \\ y' = r' \cos \varphi' \sin \lambda' \\ z' = r' \sin \varphi' \end{cases} \quad (2.189)$$

Nuevamente, en virtud de la Ec. (2.183) y teniendo en cuenta las Ecs. (2.188) y (2.189), se tiene:

$$\begin{aligned} C_{10} &= \frac{1}{M_p R} \iiint_V z' \rho(\mathbf{r}') dV = \frac{Z_{\text{CM}}}{R} \\ C_{11} &= \frac{1}{M_p R} \iiint_V x' \rho(\mathbf{r}') dV = \frac{X_{\text{CM}}}{R} \\ S_{11} &= \frac{1}{M_p R} \iiint_V y' \rho(\mathbf{r}') dV = \frac{Y_{\text{CM}}}{R} \end{aligned}$$

donde  $X_{\text{CM}}$ ,  $Y_{\text{CM}}$  y  $Z_{\text{CM}}$  son las coordenadas cartesianas del centro de masa de la distribución de masa. Dado que tal punto coincide con el origen del sistema de referencia elegido, ha de ser  $C_{10} = C_{11} = S_{11} = 0$ . Luego:

$$W^{(\text{ccg})} = -\frac{G M_p}{r} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left( \frac{R}{r} \right)^l P_{lm}(\sin \varphi) [C_{lm} \cos(m\lambda) + S_{lm} \sin(m\lambda)] \quad (2.190)$$

Por último, se consideran los términos para los cuales  $l = 2$  y, por tanto,  $m = 0, 1, 2$ . Teniendo en cuenta nuevamente la Ec. (2.189) y que:

$$P_{20}(\sin \varphi') = \frac{1}{2} (3 \sin^2 \varphi' - 1); \quad P_{21}(\sin \varphi') = 3 \sin \varphi' \cos \varphi' \quad (2.191)$$

$$\text{y} \quad P_{22}(\sin \varphi') = 3 \cos^2 \varphi' \quad (2.192)$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} C_{20} &= \frac{1}{2 M_p R^2} \iiint_V [2(z')^2 - (x'^2 + y'^2)] \rho(\mathbf{r}') dV \\ C_{21} &= \frac{1}{M_p R^2} \iiint_V x' z' \rho(\mathbf{r}') dV & S_{21} &= \frac{1}{M_p R^2} \iiint_V y' z' \rho(\mathbf{r}') dV \\ C_{22} &= \frac{1}{M_p R^2} \iiint_V (x'^2 - y'^2) \rho(\mathbf{r}') dV & S_{22} &= \frac{1}{2 M_p R^2} \iiint_V x' y' \rho(\mathbf{r}') dV \end{aligned}$$

Recordando las definiciones de los momentos y de los productos de inercia:

$$\begin{aligned}
 A &= \iiint_V (y'^2 + z'^2) \rho(\mathbf{r}') dV & D &= \iiint_V y' z' \rho(\mathbf{r}') dV \\
 B &= \iiint_V (x'^2 + z'^2) \rho(\mathbf{r}') dV & E &= \iiint_V x' z' \rho(\mathbf{r}') dV \\
 C &= \iiint_V (x'^2 + y'^2) \rho(\mathbf{r}') dV & F &= \iiint_V x' y' \rho(\mathbf{r}') dV
 \end{aligned} \tag{2.193}$$

no es difícil ver que:

$$A + B - C = \iiint_V 2(z')^2 \rho(\mathbf{r}') dV \quad \text{y} \quad B - A = \iiint_V (x'^2 - y'^2) \rho(\mathbf{r}') dV \tag{2.194}$$

y, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 C_{20} &= \frac{1}{2 M_p R^2} [A + B - 2C] = -J_2 \\
 C_{21} &= \frac{E}{M_p R^2} & S_{21} &= \frac{D}{M_p R^2} \\
 C_{22} &= \frac{B - A}{4 M_p R^2} & S_{22} &= \frac{F}{2 M_p R^2}
 \end{aligned} \tag{2.195}$$

Se sabe que los momentos y los productos de inercia son las componentes del conocido *tensor de inercia* del cuerpo considerado. Cabe destacar que siempre se puede encontrar un sistema de referencia tal que dicho tensor sea diagonal, en cuyo caso los momentos de inercia  $A$ ,  $B$  y  $C$  se llaman *momentos principales de inercia* dado que cada uno de ellos se calcula con respecto al eje principal (del sistema de referencia en donde el tensor de inercia es diagonal) correspondiente y, en consecuencia,  $D = E = F = 0$ .

Tal como puede observarse en las Ecs. (2.193), los momentos y los productos de inercia caracterizan la distribución interna de masa del cuerpo, es decir, el perfil de densidad del mismo,  $\rho(\mathbf{r}')$ , y esto mismo se ve reflejado en los coeficientes del campo gravitatorio. El coeficiente  $C_{20}$  mide la desviación del campo gravitatorio del cuerpo con respecto al potencial central, el cual sería generado por una masa puntual o por una distribución perfectamente esférica y homogénea, mientras que el coeficiente  $C_{22}$  mide la desviación del mismo con respecto a uno con simetría rotacional. Vale la pena destacar que el primero es generalmente el más apreciable —para el caso de la Tierra, por ejemplo, el mismo es tres órdenes de magnitud mayor que los demás—, aunque la influencia de ambos en la dinámica orbital y rotacional es verdaderamente relevante, tal como se verá más adelante.

Para concluir este segmento de la construcción teórica desarrollada, se hace ahora la transformación del potencial dado por la Ec. (2.190) de coordenadas esféricas a elementos orbitales. Para ello, se utilizará la Ec. (2.160) expresada de forma un tanto diferente, esto es:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{r^{l+1}} P_{lm}(\sin \varphi) \exp[i m \lambda] &= \frac{1}{a^{l+1}} \sum_{p=0}^l F_{lmp}(i) \\
 &\times \sum_{q=-\infty}^{\infty} X_{l-2p+q}^{\nu, l-2p}(e) \exp[i(v_{lmpq} - m\theta + \phi_{lm})] \tag{2.196}
 \end{aligned}$$

donde, nuevamente, se ha considerado  $\lambda = \alpha - \theta = \alpha - \Omega + \Omega - \theta$ . Además, las fases suplementarias  $\phi_{lm}$  están dadas por la Ec. (2.153) y las combinaciones lineales  $v_{lmpq}$  por:

$$v_{lmpq} = (l - 2p)\omega + (l - 2p + q)M + m\Omega \quad (2.197)$$

Luego, aplicando la transformación (2.196) a la ya mencionada Ec. (2.190), se obtiene:

$$W^{(\text{ccg})}(\mathbf{r}) = -\frac{G M_p}{a} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{R}{a}\right)^l \sum_{p=0}^l F_{lmp}(i) \sum_{q=-\infty}^{\infty} X_{l-2p+q}^{-(l+1), l-2p}(e) \\ \times [C_{lm} \cos(v_{lmpq} - m\theta + \phi_{lm}) + S_{lm} \sin(v_{lmpq} - m\theta + \phi_{lm})] \quad (2.198)$$

Por supuesto, el vector de posición del punto genérico del espacio  $\mathbf{r}$  puede asociarse a aquél correspondiente a la partícula  $k$ , es decir, a la partícula que se encuentra en el punto  $\mathbf{r}_k$  y su masa es  $m_k$ .

### 2.3. Estudio de la evolución dinámica considerando la disipación en ambos cuerpos

En un artículo publicado recientemente, [Boué y Efroimsky \(2019\)](#) desarrollaron un formalismo para estudiar la evolución dinámica completa de un sistema binario debido a la interacción de mareas, más precisamente teniendo en cuenta la disipación en ambos cuerpos. Si bien este problema había sido abordado por [Kaula \(1964\)](#) para estudiar la evolución del sistema Tierra-Luna, su tratamiento contiene algunos errores que pueden llevar a resultados incorrectos, como por ejemplo que no se verifique la conservación del momento angular total del sistema.

Por supuesto, no se va a exponer aquí todo el desarrollo llevado a cabo por [Boué y Efroimsky \(2019\)](#) sino simplemente se van a reproducir las ecuaciones de movimiento obtenidas por dichos autores. La idea principal del trabajo antes citado, es que se consideran dos sistemas de referencia, uno para cada cuerpo. Como cabe esperar, el origen de cada sistema coincide con el centro de masa del cuerpo correspondiente y se mueve solidario a él. Así, se deben considerar, por un lado, los ángulos de Euler que dan la orientación de cada cuerpo respecto de un sistema de referencia inercial y, por otro lado, los elementos orbitales que parametrizan la posición de cada cuerpo respecto del otro. Dado que para pasar de un sistema a otro se requieren varias rotaciones sucesivas, dicha transformación solamente afecta a la inclinación, el argumento del periastro y la longitud del nodo ascendente de la órbita mutua vista desde cada sistema. Puesto que el semieje mayor, la excentricidad y la anomalía media están relacionadas con la distancia entre los cuerpos, estos parámetros no se ven afectados por las rotaciones. A continuación se presenta el sistema completo de ecuaciones de movimiento obtenidas por [Boué y Efroimsky \(2019\)](#):

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M}, \quad (2.199a)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \left( \frac{\partial R}{\partial \omega_1} + \frac{\partial R}{\partial \omega_2} \right), \quad (2.199b)$$

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} \quad (2.199c)$$

$$\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} = & \frac{\beta}{C_1 \dot{\theta}_1 \sin i_1} \left( \frac{\partial R}{\partial \omega_1} - \cos i_1 \frac{\partial R}{\partial \delta \Omega_1} \right) - \frac{1}{n a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i_1} \left( \frac{\partial R}{\partial \delta \Omega_1} - \cos i_1 \frac{\partial R}{\partial \omega_1} \right) \\ & - \frac{\sin(\omega_1 - \omega_2)}{n a^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i_2} - \frac{\cos(\omega_1 - \omega_2)}{n a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i_2} \left( \frac{\partial R}{\partial \delta \Omega_2} - \cos i_2 \frac{\partial R}{\partial \omega_2} \right), \quad (2.199d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{di_2}{dt} = & \frac{\beta}{C_2 \dot{\theta}_2 \sin i_2} \left( \frac{\partial R}{\partial \omega_2} - \cos i_2 \frac{\partial R}{\partial \delta \Omega_2} \right) - \frac{1}{n a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i_2} \left( \frac{\partial R}{\partial \delta \Omega_2} - \cos i_2 \frac{\partial R}{\partial \omega_2} \right) \\ & - \frac{\sin(\omega_2 - \omega_1)}{n a^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i_1} - \frac{\cos(\omega_2 - \omega_1)}{n a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i_1} \left( \frac{\partial R}{\partial \delta \Omega_1} - \cos i_1 \frac{\partial R}{\partial \omega_1} \right), \quad (2.199e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dt} = & -\frac{\beta}{C_1 \dot{\theta}_1 \sin i_1} \frac{\partial R}{\partial i_1} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{n a^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cos i_1}{n a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i_1} \frac{\partial R}{\partial i_1} \\ & - \frac{\cos i_1 \cos(\omega_1 - \omega_2)}{n a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i_1} \frac{\partial R}{\partial i_2} - \frac{\cos i_1 \sin(\omega_1 - \omega_2)}{n a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i_1 \sin i_2} \left( \cos i_2 \frac{\partial R}{\partial \omega_2} - \frac{\partial R}{\partial \delta \Omega_2} \right) \quad (2.199f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_2}{dt} = & -\frac{\beta}{C_2 \dot{\theta}_2 \sin i_2} \frac{\partial R}{\partial i_2} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{n a^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cos i_2}{n a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i_2} \frac{\partial R}{\partial i_2} \\ & - \frac{\cos i_2 \cos(\omega_2 - \omega_1)}{n a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i_2} \frac{\partial R}{\partial i_1} - \frac{\cos i_2 \sin(\omega_2 - \omega_1)}{n a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i_2 \sin i_1} \left( \cos i_1 \frac{\partial R}{\partial \omega_1} - \frac{\partial R}{\partial \delta \Omega_1} \right) \quad (2.199g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\delta \Omega_1}{dt} = & \frac{\beta \cos i_1}{C_1 \dot{\theta}_1 \sin i_1} \frac{\partial R}{\partial i_1} + \frac{\beta \cos \varepsilon_1}{C_1 \dot{\theta}_1 \sin \varepsilon_1} \left( \sin \delta \Omega_1 \cot i_1 \frac{\partial R}{\partial \delta \Omega_1} - \cos \delta \Omega_1 \frac{\partial R}{\partial i_1} - \frac{\sin \delta \Omega_1}{\sin i_1} \frac{\partial R}{\partial \omega_1} \right) \\ & + \frac{1}{n a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i_1} \frac{\partial R}{\partial i_1} + \frac{\cos(\omega_2 - \omega_1)}{n a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i_1} \frac{\partial R}{\partial i_2} \\ & + \frac{\sin(\omega_1 - \omega_2)}{n a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i_1 \sin i_2} \left( \cos i_2 \frac{\partial R}{\partial \omega_2} - \frac{\partial R}{\partial \delta \Omega_2} \right) \quad (2.199h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\delta \Omega_2}{dt} = & \frac{\beta \cos i_2}{C_2 \dot{\theta}_2 \sin i_2} \frac{\partial R}{\partial i_2} + \frac{\beta \cos \varepsilon_2}{C_2 \dot{\theta}_2 \sin \varepsilon_2} \left( \sin \delta \Omega_2 \cot i_2 \frac{\partial R}{\partial \delta \Omega_2} - \cos \delta \Omega_2 \frac{\partial R}{\partial i_2} - \frac{\sin \delta \Omega_2}{\sin i_2} \frac{\partial R}{\partial \omega_2} \right) \\ & + \frac{1}{n a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i_2} \frac{\partial R}{\partial i_2} + \frac{\cos(\omega_1 - \omega_2)}{n a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i_2} \frac{\partial R}{\partial i_1} \\ & + \frac{\sin(\omega_2 - \omega_1)}{n a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i_2 \sin i_1} \left( \cos i_1 \frac{\partial R}{\partial \omega_1} - \frac{\partial R}{\partial \delta \Omega_1} \right) \quad (2.199i) \end{aligned}$$

donde  $\beta = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  es la masa reducida, mientras que  $i_1$ ,  $\omega_1$  y  $\delta \Omega_1$  son la inclinación, el argumento del periastro y la longitud del nodo ascendente de la órbita con respecto al sistema de referencia ligado al cuerpo 1. Por su parte,  $i_2$ ,  $\omega_2$  y  $\delta \Omega_2$  son la inclinación, el argumento del periastro y la longitud del nodo ascendente de la órbita con respecto al sistema de referencia ligado al cuerpo 2.  $C_1$  y  $C_2$  son los momentos de inercia correspondientes a los ejes de rotación de los cuerpos 1 y 2, respectivamente.

Por supuesto, solamente hay un plano orbital, por lo que las inclinaciones antes mencionadas pueden identificarse con las oblicuidades. Sin embargo, esto depende del



sistema que se considere (G. Boué; comunicación personal, 27 de septiembre de 2019). Por ejemplo, si se estudia el movimiento de un planeta alrededor de una estrella —que es mucho más masiva que el anterior—, y se identifica el cuerpo 1 con la estrella y el 2 con el planeta, entonces  $i_1$  será la inclinación de la órbita del planeta, mientras que  $i_2$  será la oblicuidad del mismo.

Para completar el sistema, son necesarias las siguientes ecuaciones que describen la dinámica rotacional de cada cuerpo:

$$\frac{d\varepsilon_k}{dt} = -\frac{\beta}{C_k \dot{\theta}_k} \left( \cos \varOmega_k \cot i_k \frac{\partial R}{\partial \varOmega_k} + \sin \varOmega_k \frac{\partial R}{\partial i} - \frac{\cos \varOmega_k}{\sin i_k} \frac{\partial R}{\partial \omega_k} \right) \quad (2.200)$$

y

$$\frac{d^2 \theta_k}{dt^2} = -\frac{\beta}{C_k} \frac{\partial R}{\partial \varOmega_k} \quad (2.201)$$

donde  $k = 1, 2$ .

Cabe destacar que las ecuaciones antes presentadas fueron obtenidas bajo la llamada aproximación giroscópica, la cual consiste en considerar el caso en que la velocidad de rotación intrínseca es mucho mayor que las de precesión y de nutación. Además, debe notarse la presencia de los términos que dependen de las velocidades de rotación de los respectivos cuerpos. Estos surgen debido a que los sistemas de referencia elegidos (aquellos ligados a los cuerpos) no son inerciales y, por lo tanto, es de esperar que aparezcan términos extras relacionados a la naturaleza de dichos sistemas de referencia. En relación a esto último, si bien [Boué y Efroimsky \(2019\)](#) no lo mencionan explícitamente, en la deducción de las Ecs. (2.199), (2.200) y (2.201) hicieron uso de la libertad de gauge mencionada en la Subsección 2.1.3. Tal como explica [Efroimsky \(2005b\)](#), cuando se considera la dinámica orbital de un cuerpo respecto del sistema de referencia no inercial solidario a un cuerpo rotante, en el cual el plano de referencia es el plano ecuatorial, resulta más conveniente la elección del gauge particular  $\Phi = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{f}$  (donde  $\boldsymbol{\mu}$  es el vector velocidad de precesión), dado que simplifica en gran medida las expresiones de las ecuaciones de movimiento ([Efroimsky y Goldreich, 2004](#)). El conjunto de elementos orbitales que resulta de dicha elección no es el clásico conjunto de elementos osculantes, sino que es otro conocido como conjunto de *elementos de contacto* ([Efroimsky, 2005a,b](#)).

## 2.4. Construcción del formalismo incorporando interacción de mareas y triaxialidad. Deducción de las ecuaciones de movimiento

En esta sección se desarrolla la construcción del formalismo que permite estudiar la evolución orbital y rotacional de un sistema de dos cuerpos debido a las mareas que cada uno eleva en el otro y a la triaxialidad de cada uno de ellos, y se derivarán las expresiones de las ecuaciones de movimiento a partir de las Ecs. (2.199), (2.200) y (2.201) adecuadas para el estudio de la evolución orbital y rotacional de un sistema de dos cuerpos debido a las mareas que cada uno eleva en el otro y a la triaxialidad de cada uno de ellos. Ambos cuerpos están caracterizados por su masa ( $m_1$  y  $m_2$ ), sus radios ( $R_1$  y  $R_2$ ) y, dado que se considera que cada uno rota alrededor del eje correspondiente al mayor momento de inercia, también por sus respectivos  $C_1$  y  $C_2$ .

Además, la respuesta de cada uno de ellos ante las fuerzas que los deforman están caracterizadas por sus correspondientes funciones de calidad ([Makarov, 2012](#)):

$$K_R^{(k)}(l, \omega_{lmpq}^{(k)}) = k_l^{(k)}(\chi^{(k)}) \cos \epsilon_{lmpq}^{(k)}(\chi^{(k)}) \quad (2.202a)$$

$$K_I^{(k)}(l, \omega_{lmpq}^{(k)}) = k_l^{(k)}(\chi^{(k)}) \sin \epsilon_{lmpq}^{(k)}(\chi^{(k)}) \operatorname{sgn}(\omega_{lmpq}^{(k)}), \quad (2.202b)$$

donde  $k = 1, 2$  y  $\chi^{(k)} = |\omega_{lmpq}^{(k)}|$ . Estas funciones, además de depender de las frecuencias a las que se excitan las deformaciones en cada cuerpo ( $\chi^{(k)}$ ), dependen también de la reología que se considere para cada uno. En el capítulo siguiente se tratará este tema con más detalle.

Para comenzar, es necesario dar primero la expresión de la función perturbadora:

$$R = -\frac{1}{\beta} (m_2 [U_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2^*) + V_1(\mathbf{r}_2)] + m_1 [U_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1^*) + V_2(\mathbf{r}_1)]) \quad (2.203)$$

donde  $U_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2^*)$  y  $U_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1^*)$  son los potenciales adicionales debido a la deformación por mareas de cada uno de los cuerpos, mientras que  $V_1(\mathbf{r}_2)$  y  $V_2(\mathbf{r}_1)$  son los potenciales gravitatorios de cada cuerpo. Los primeros están dados por la Ec. (2.175) (considerando el caso  $j = k$ ), mientras que los segundos por la Ec. (2.198).

El vector de posición del cuerpo 2 respecto del cuerpo 1 se denota  $\mathbf{r}_2$ . Sus coordenadas están expresadas con respecto al sistema de coordenadas solidario al último, por lo tanto, los elementos orbitales asociados a dicha posición son  $(a, e, M, i_1, \omega_1, \delta\Omega_1)$ . Análogamente,  $\mathbf{r}_1$  es el vector de posición del cuerpo 1 respecto del cuerpo 2. Asimismo, sus coordenadas están expresadas con respecto al sistema de coordenadas solidario al último; entonces, los elementos orbitales asociados a dicha posición son  $(a, e, M, i_2, \omega_2, \delta\Omega_2)$ . En virtud de esto, se tiene:

$$\begin{aligned} U_1 &= U_1(a, e, M, i_1, \omega_1, \delta\Omega_1) & U_2 &= U_2(a, e, M, i_2, \omega_2, \delta\Omega_2) \\ V_1 &= V_1(a, e, M, i_1, \omega_1, \delta\Omega_1) & V_2 &= V_2(a, e, M, i_2, \omega_2, \delta\Omega_2) \end{aligned}$$

A continuación se dan las expresiones explícitas de cada uno de estos potenciales perturbadores. Por un lado, el potencial adicional originado por la interacción de mareas en el cuerpo 1 está dado por:

$$U_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2^*) = -\frac{G m_2}{a^*} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{h=0}^l \sum_{s=-\infty}^{\infty} U_{lmpqhs}^{(1)}, \quad (2.204)$$

donde

$$\begin{aligned} U_{lmpqhs}^{(1)} &= \left(\frac{R_1}{a}\right)^{l+1} \left(\frac{R_1}{a^*}\right)^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) F_{lmp}(i_1^*) G_{lpq}(e^*) F_{lmh}(i_1) G_{lhs}(e) \\ &\times \left[ \cos \left[ \left( v_{lmpq}^{(1)*} - m \theta_1^* \right) - \left( v_{lmhs}^{(1)} - m \theta_1 \right) \right] K_R^{(1)}(l, \omega_{lmpq}^{(1)}) \right. \\ &\quad \left. + \sin \left[ \left( v_{lmpq}^{(1)*} - m \theta_1^* \right) - \left( v_{lmhs}^{(1)} - m \theta_1 \right) \right] K_I^{(1)}(l, \omega_{lmpq}^{(1)}) \right]. \quad (2.205) \end{aligned}$$

Por otro lado, el potencial gravitatorio del mismo cuerpo generado por la distribución inhomogénea y permanente dentro del mismo es:

$$V_1(\mathbf{r}_2) = -\frac{G m_1}{a} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} V_{lmpq}^{(1)}, \quad (2.206)$$

donde

$$V_{lmpq}^{(1)} = \left(\frac{R_1}{a}\right)^l F_{lmp}(i_1) G_{lpq}(e) \times \left[ C_{lm}^{(1)} \cos \left( v_{lmpq}^{(1)} - m \theta_1 + \phi_{lm} \right) + S_{lm}^{(1)} \sin \left( v_{lmpq}^{(1)} - m \theta_1 + \phi_{lm} \right) \right]. \quad (2.207)$$

Análogamente, la expresión del potencial adicional de mareas correspondiente al cuerpo 2 es:

$$U_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1^*) = -\frac{G m_1}{a^*} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{h=0}^l \sum_{s=-\infty}^{\infty} U_{lmpqhs}^{(2)}, \quad (2.208)$$

donde

$$U_{lmpqhs}^{(2)} = \left(\frac{R_2}{a}\right)^{l+1} \left(\frac{R_2}{a^*}\right)^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) F_{lmp}(i_2^*) G_{lpq}(e^*) F_{lmh}(i_2) G_{lhs}(e) \times \left[ \cos \left[ \left( v_{lmpq}^{(2),*} - m \theta_2^* \right) - \left( v_{lmhs}^{(2)} - m \theta_2 \right) \right] K_R^{(2)} \left( l, \omega_{lmpq}^{(2)} \right) + \sin \left[ \left( v_{lmpq}^{(2),*} - m \theta_2^* \right) - \left( v_{lmhs}^{(2)} - m \theta_2 \right) \right] K_I^{(2)} \left( l, \omega_{lmpq}^{(2)} \right) \right]; \quad (2.209)$$

mientras que aquella correspondiente a su distribución permanente e inhomogénea de masa en su interior es:

$$V_2(\mathbf{r}_1) = -\frac{G m_2}{a} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} V_{lmpq}^{(2)} \quad (2.210)$$

donde

$$V_{lmpq}^{(2)} = \left(\frac{R_2}{a}\right)^l F_{lmp}(i_2) G_{lpq}(e) \times \left[ C_{lm}^{(2)} \cos \left( v_{lmpq}^{(2)} - m \theta_2 + \phi_{lm} \right) + S_{lm}^{(2)} \sin \left( v_{lmpq}^{(2)} - m \theta_2 + \phi_{lm} \right) \right]. \quad (2.211)$$

Puede verse que en estas expresiones se han utilizado las funciones de la excentricidad  $G_{lpq}(e)$ , las cuales están relacionadas con los coeficientes de Hansen mediante ([Giacaglia, 1976](#)):

$$G_{lpq}(e) = X_{l-2p+q}^{-(l+1), l-2p}(e)$$

A fin de evitar la presentación de una sucesión de ecuaciones similares, puede observarse que las expresiones de las sumas de los términos adimensionales correspondientes a los potenciales perturbadores debidos a la interacción de mareas y la triaxialidad de cada cuerpo, dadas por las Ecs. (2.205), (2.209), (2.207) y (2.211), respectivamente, son análogas entre sí para cada efecto. Esto es, identificando a cada cuerpo nuevamente con el índice  $k$  antes considerado, las Ecs. (2.205) y (2.209) pueden condensarse en:

$$U_{lmpqhs}^{(k)} = \left(\frac{R_k}{a}\right)^{l+1} \left(\frac{R_k}{a^*}\right)^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) F_{lmp}(i_k^*) G_{lpq}(e^*) F_{lmh}(i_k) G_{lhs}(e) \times \left[ \cos \left[ \left( v_{lmpq}^{(k),*} - m \theta_k^* \right) - \left( v_{lmhs}^{(k)} - m \theta_k \right) \right] K_R^{(k)} \left( l, \omega_{lmpq}^{(k)} \right) + \sin \left[ \left( v_{lmpq}^{(k),*} - m \theta_k^* \right) - \left( v_{lmhs}^{(k)} - m \theta_k \right) \right] K_I^{(k)} \left( l, \omega_{lmpq}^{(k)} \right) \right], \quad (2.212)$$

mientras que las Ecs. (2.207) y (2.211) pueden englobarse en la expresión:

$$V_{lmpq}^{(k)} = \left( \frac{R_k}{a} \right)^l F_{lmp}(i_k) G_{lpq}(e) \times \left[ C_{lm}^{(k)} \cos \left( v_{lmpq}^{(k)} - m \theta_k + \phi_{lm} \right) + S_{lm}^{(k)} \sin \left( v_{lmpq}^{(k)} - m \theta_k + \phi_{lm} \right) \right]. \quad (2.213)$$

De esta manera puede simplificarse un poco la exposición de las derivadas antes mencionadas. Con respecto a esto último, cabe destacar que la regla general para calcular las derivadas de los potenciales mareales es derivar con respecto a las variables sin asterisco y luego identificar aquellas con asteriscos con las anteriores. Esto es equivalente a evaluar dichos gradientes en  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1^*$  y en  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2^*$ , respectivamente.

A continuación se van a dar las expresiones de las derivadas de cada uno de los potenciales perturbadores y de la función perturbadora con respecto a los elementos orbitales.

### Semieje mayor

Dado que los cuatro potenciales dependen de  $a$ , la derivada de  $R$  respecto de dicho parámetro es:

$$\frac{\partial R}{\partial a} = -\frac{1}{\beta} \left[ m_2 \left( \frac{\partial U_1}{\partial a} + \frac{\partial V_1}{\partial a} \right) + m_1 \left( \frac{\partial U_2}{\partial a} + \frac{\partial V_2}{\partial a} \right) \right], \quad (2.214)$$

Las expresiones correspondiente de las derivadas de  $U_1$  y  $U_2$ , por un lado, son:

$$\frac{\partial U_1}{\partial a} = \frac{G m_2}{a^2} S \left( \frac{\partial U_1}{\partial a} \right), \quad (2.215)$$

y

$$\frac{\partial U_2}{\partial a} = \frac{G m_1}{a^2} S \left( \frac{\partial U_2}{\partial a} \right), \quad (2.216)$$

donde

$$S \left( \frac{\partial U_k}{\partial a} \right) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{h=0}^l \sum_{s=-\infty}^{\infty} (l+1) \left( \frac{R_k}{a} \right)^{2l+1} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) \times F_{lmp}(i_k) G_{lpq}(e) F_{lmh}(i_k) G_{lhs}(e) \times \left[ \cos \left( v_{lmpq}^{(k)} - v_{lmhs}^{(k)} \right) K_R^{(k)} \left( l, \omega_{lmpq}^{(k)} \right) + \sin \left( v_{lmpq}^{(k)} - v_{lmhs}^{(k)} \right) K_I^{(k)} \left( l, \omega_{lmpq}^{(k)} \right) \right]. \quad (2.217)$$

Por otro lado, las derivadas de  $V_1$  y  $V_2$  respecto de  $a$  son:

$$\frac{\partial V_k}{\partial a} = \frac{G m_k}{a^2} S \left( \frac{\partial V_k}{\partial a} \right) \quad (2.218)$$

donde

$$S \left( \frac{\partial V_k}{\partial a} \right) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} (l+1) \left( \frac{R_k}{a} \right)^l F_{lmp}(i_k) G_{lpq}(e) \times \left[ C_{lm}^{(k)} \cos \left( v_{lmpq}^{(k)} - m \theta_k + \phi_{lm} \right) + S_{lm}^{(k)} \sin \left( v_{lmpq}^{(k)} - m \theta_k + \phi_{lm} \right) \right]. \quad (2.219)$$

Luego, reemplazando las Ecs. (2.215), (2.216) y (2.218) en la Ec. (2.214) se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial a} &= -n^2 a \left[ \frac{m_2}{m_1} S \left( \frac{\partial U_1}{\partial a} \right) + S \left( \frac{\partial V_1}{\partial a} \right) + \frac{m_1}{m_2} S \left( \frac{\partial U_2}{\partial a} \right) + S \left( \frac{\partial V_2}{\partial a} \right) \right] \\ &= -n^2 a S \left( \frac{\partial R}{\partial a} \right)\end{aligned}\quad (2.220)$$

### Excentricidad

También en este caso ocurre que los cuatro potenciales dependen de la excentricidad. Por lo tanto, la derivada de  $R$  respecto de  $e$  es:

$$\frac{\partial R}{\partial e} = -\frac{1}{\beta} \left[ m_2 \left( \frac{\partial U_1}{\partial e} + \frac{\partial V_1}{\partial e} \right) + m_1 \left( \frac{\partial U_2}{\partial e} + \frac{\partial V_2}{\partial e} \right) \right], \quad (2.221)$$

donde se tiene, para  $U_1$  y  $U_2$ :

$$\frac{\partial U_1}{\partial e} = -\frac{G m_2}{a} S \left( \frac{\partial U_1}{\partial e} \right) \quad (2.222)$$

y

$$\frac{\partial U_2}{\partial e} = -\frac{G m_1}{a} S \left( \frac{\partial U_2}{\partial e} \right), \quad (2.223)$$

respectivamente, donde:

$$\begin{aligned}S \left( \frac{\partial U_k}{\partial e} \right) &= \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{h=0}^l \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left( \frac{R_k}{a} \right)^{2l+1} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) \\ &\quad \times F_{lmp}(i_k) G_{lpq}(e) F_{lmh}(i_k) \frac{dG_{lhs}(e)}{de} \\ &\times \left[ \cos \left( v_{lmpq}^{(k)} - v_{lmhs}^{(k)} \right) K_R^{(k)} \left( l, \omega_{lmpq}^{(k)} \right) + \sin \left( v_{lmpq}^{(k)} - v_{lmhs}^{(k)} \right) K_I^{(k)} \left( l, \omega_{lmpq}^{(k)} \right) \right].\end{aligned}\quad (2.224)$$

En cambio, para  $V_1$  y  $V_2$  se tiene:

$$\frac{\partial V_k}{\partial e} = -\frac{G m_k}{a} S \left( \frac{\partial V_k}{\partial e} \right) \quad (2.225)$$

donde:

$$\begin{aligned}S \left( \frac{\partial V_k}{\partial e} \right) &= \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} (l+1) \left( \frac{R_k}{a} \right)^l F_{lmp}(i_k) \frac{dG_{lpq}(e)}{de} \\ &\times \left[ C_{lm}^{(k)} \cos \left( v_{lmpq}^{(k)} - m \theta_k + \phi_{lm} \right) + S_{lm}^{(k)} \sin \left( v_{lmpq}^{(k)} - m \theta_k + \phi_{lm} \right) \right].\end{aligned}\quad (2.226)$$

Luego, reemplazando las Ecs. (2.222), (2.223) y (2.225) en la Ec. (2.221) se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial e} &= n^2 a^2 \left[ \frac{m_2}{m_1} S \left( \frac{\partial U_1}{\partial e} \right) + S \left( \frac{\partial V_1}{\partial e} \right) + \frac{m_1}{m_2} S \left( \frac{\partial U_2}{\partial e} \right) + S \left( \frac{\partial V_2}{\partial e} \right) \right] \\ &= n^2 a^2 S \left( \frac{\partial R}{\partial e} \right)\end{aligned}\quad (2.227)$$

### Anomalía media

Una vez más, a igual que para el caso de las derivadas respecto de  $a$  y de  $e$ , los cuatro potenciales perturbadores generados por ambos cuerpos dependen de la anomalía media. Luego:

$$\frac{\partial R}{\partial M} = -\frac{1}{\beta} \left[ m_2 \left( \frac{\partial U_1}{\partial M} + \frac{\partial V_1}{\partial M} \right) + m_1 \left( \frac{\partial U_2}{\partial M} + \frac{\partial V_2}{\partial M} \right) \right]. \quad (2.228)$$

Siendo, por un lado:

$$\frac{\partial U_1}{\partial M} = -\frac{G m_2}{a} S \left( \frac{\partial U_1}{\partial M} \right), \quad (2.229)$$

y

$$\frac{\partial U_2}{\partial M} = -\frac{G m_1}{a} S \left( \frac{\partial U_2}{\partial M} \right), \quad (2.230)$$

donde

$$\begin{aligned} S \left( \frac{\partial U_k}{\partial M} \right) &= \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{h=0}^l \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left( \frac{R_k}{a} \right)^{2l+1} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) \\ &\quad \times F_{lmp}(i_k) G_{lpq}(e) F_{lmh}(i_k) G_{lhs}(e) (l - 2h + s) \\ &\quad \times \left[ \sin \left( v_{lmpq}^{(k)} - v_{lmhs}^{(k)} \right) K_R^{(k)} \left( l, \omega_{lmpq}^{(k)} \right) - \cos \left( v_{lmpq}^{(k)} - v_{lmhs}^{(k)} \right) K_I^{(k)} \left( l, \omega_{lmpq}^{(k)} \right) \right]; \end{aligned} \quad (2.231)$$

Por otro lado, se tiene:

$$\frac{\partial V_k}{\partial M} = -\frac{G m_k}{a^2} S \left( \frac{\partial V_1}{\partial M} \right) \quad (2.232)$$

donde

$$\begin{aligned} S \left( \frac{\partial V_k}{\partial M} \right) &= \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left( \frac{R_k}{a} \right)^l F_{lmp}(i_k) G_{lpq}(e) (l - 2p + q) \\ &\quad \times \left[ -C_{lm}^{(k)} \sin \left( v_{lmpq}^{(k)} - m \theta_k + \phi_{lm} \right) + S_{lm}^{(k)} \cos \left( v_{lmpq}^{(k)} - m \theta_k + \phi_{lm} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.233)$$

Luego, reemplazando las Ecs. (2.229), (2.230) y (2.232) en la Ec. (2.228) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial M} &= n^2 a^2 \left[ \frac{m_2}{m_1} S \left( \frac{\partial U_1}{\partial M} \right) + S \left( \frac{\partial V_1}{\partial M} \right) + \frac{m_1}{m_2} S \left( \frac{\partial U_2}{\partial M} \right) + S \left( \frac{\partial V_2}{\partial M} \right) \right] \\ &= n^2 a^2 S \left( \frac{\partial R}{\partial M} \right) \end{aligned} \quad (2.234)$$

### Inclinación respecto del ecuador del cuerpo $k$

Dado que los potenciales perturbadores generados por cada cuerpo dependen de la inclinación del plano orbital respecto del plano del ecuador del mismo, entonces la derivación de aquellos se debe llevar a cabo respecto de dicha inclinación y no de la que corresponde al otro cuerpo. Esto es:

$$\frac{\partial R}{\partial i_1} = -\frac{m_2}{\beta} \left( \frac{\partial U_1}{\partial i_1} + \frac{\partial V_1}{\partial i_1} \right). \quad (2.235)$$

y

$$\frac{\partial R}{\partial i_2} = -\frac{m_1}{\beta} \left( \frac{\partial U_2}{\partial i_2} + \frac{\partial V_2}{\partial i_2} \right). \quad (2.236)$$

Siendo, por un lado:

$$\frac{\partial U_1}{\partial i_1} = -\frac{G m_2}{a} S \left( \frac{\partial U_1}{\partial i_1} \right), \quad (2.237)$$

y

$$\frac{\partial U_2}{\partial i_2} = -\frac{G m_1}{a} S \left( \frac{\partial U_2}{\partial i_2} \right), \quad (2.238)$$

donde

$$\begin{aligned} S \left( \frac{\partial U_k}{\partial i_k} \right) &= \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{h=0}^l \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left( \frac{R_k}{a} \right)^{2l+1} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) \\ &\quad \times F_{lmp}(i_k) G_{lpq}(e) \frac{dF_{lmh}(i_k)}{di_k} G_{lhs}(e) \\ &\quad \times \left[ \cos \left( v_{lmpq}^{(k)} - v_{lmhs}^{(k)} \right) K_R^{(k)} \left( l, \omega_{lmpq}^{(k)} \right) + \sin \left( v_{lmpq}^{(k)} - v_{lmhs}^{(k)} \right) K_I^{(k)} \left( l, \omega_{lmpq}^{(k)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.239)$$

Por otro lado:

$$\frac{\partial V_k}{\partial i_k} = -\frac{G m_k}{a} S \left( \frac{\partial V_1}{\partial i_k} \right), \quad (2.240)$$

donde

$$\begin{aligned} S \left( \frac{\partial V_k}{\partial i_k} \right) &= \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left( \frac{R_k}{a} \right)^l \frac{dF_{lmp}(i_k)}{di_k} G_{lpq}(e) \\ &\quad \times \left[ C_{lm}^{(1)} \cos \left( v_{lmpq}^{(k)} - m \theta_k + \phi_{lm} \right) + S_{lm}^{(k)} \sin \left( v_{lmpq}^{(k)} - m \theta_k + \phi_{lm} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.241)$$

Reemplazando entonces las Ecs. (2.237) y (2.240) (con  $k = 1$ ) en la Ec. (2.235) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial i_1} &= \frac{G m_1 m_2}{\beta a} \left[ \frac{m_2}{m_1} S \left( \frac{\partial U_1}{\partial i_1} \right) + S \left( \frac{\partial V_1}{\partial i_1} \right) \right] = \frac{G m_1 m_2}{\beta a} S \left( \frac{\partial R}{\partial i_1} \right) \\ &= n^2 a^2 \left[ \frac{m_2}{m_1} S \left( \frac{\partial U_1}{\partial i_1} \right) + S \left( \frac{\partial V_1}{\partial i_1} \right) \right] = n^2 a^2 S \left( \frac{\partial R}{\partial i_1} \right). \end{aligned} \quad (2.242)$$

Luego, reemplazando entonces las Ecs. (2.238) y (2.240) (con  $k = 2$ ) en la Ec. (2.235) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial i_2} &= \frac{G m_1 m_2}{\beta a} \left[ \frac{m_1}{m_2} S \left( \frac{\partial U_2}{\partial i_2} \right) + S \left( \frac{\partial V_2}{\partial i_2} \right) \right] = \frac{G m_1 m_2}{\beta a} S \left( \frac{\partial R}{\partial i_2} \right) \\ &= n^2 a^2 \left[ \frac{m_1}{m_2} S \left( \frac{\partial U_2}{\partial i_2} \right) + S \left( \frac{\partial V_2}{\partial i_2} \right) \right] = n^2 a^2 S \left( \frac{\partial R}{\partial i_2} \right). \end{aligned} \quad (2.243)$$

### Argumento del periastro respecto del ecuador del cuerpo $k$

Este caso es similar al de la derivación con respecto a  $i_k$ . Esto es:

$$\frac{\partial R}{\partial \omega_1} = -\frac{m_2}{\beta} \left( \frac{\partial U_1}{\partial \omega_1} + \frac{\partial V_1}{\partial \omega_1} \right) \quad (2.244)$$

y

$$\frac{\partial R}{\partial \omega_2} = -\frac{m_1}{\beta} \left( \frac{\partial U_2}{\partial \omega_2} + \frac{\partial V_2}{\partial \omega_2} \right). \quad (2.245)$$

Siendo, por un lado:

$$\frac{\partial U_1}{\partial \omega_1} = -\frac{G m_2}{a} S \left( \frac{\partial U_1}{\partial \omega_1} \right) \quad (2.246)$$

y

$$\frac{\partial U_2}{\partial \omega_2} = -\frac{G m_1}{a} S \left( \frac{\partial U_2}{\partial \omega_2} \right), \quad (2.247)$$

donde

$$\begin{aligned} S \left( \frac{\partial U_k}{\partial \omega_k} \right) &= \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{h=0}^l \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left( \frac{R_k}{a} \right)^{2l+1} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) \\ &\quad \times F_{lmp}(i_k) G_{lpq}(e) F_{lmh}(i_k) G_{lhs}(e) (l-2h) \\ &\quad \times \left[ \sin \left( v_{lmpq}^{(k)} - v_{lmhs}^{(k)} \right) K_R^{(k)} \left( l, \omega_{lmpq}^{(k)} \right) - \cos \left( v_{lmpq}^{(k)} - v_{lmhs}^{(k)} \right) K_I^{(k)} \left( l, \omega_{lmpq}^{(k)} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.248)$$

y, por otro lado:

$$\frac{\partial V_k}{\partial \omega_k} = -\frac{G m_k}{a^2} S \left( \frac{\partial V_k}{\partial \omega_k} \right) \quad (2.249)$$

donde

$$\begin{aligned} S \left( \frac{\partial V_k}{\partial \omega_k} \right) &= \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left( \frac{R_k}{a} \right)^l F_{lmp}(i_k) G_{lpq}(e) (l-2p) \\ &\quad \times \left[ -C_{lm}^{(k)} \sin \left( v_{lmpq}^{(k)} - m \theta_k + \phi_{lm} \right) + S_{lm}^{(k)} \cos \left( v_{lmpq}^{(k)} - m \theta_k + \phi_{lm} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.250)$$

Luego, reemplazando las Ecs. (2.246) y (2.249) ( $k=1$ ) en la Ec. (2.244) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \omega_1} &= \frac{G m_1 m_2}{\beta a} \left[ \frac{m_2}{m_1} S \left( \frac{\partial U_1}{\partial \omega_1} \right) + S \left( \frac{\partial V_1}{\partial \omega_1} \right) \right] = \frac{G m_1 m_2}{\beta a} S \left( \frac{\partial R}{\partial \omega_1} \right) \\ &= n^2 a^2 \left[ \frac{m_2}{m_1} S \left( \frac{\partial U_1}{\partial \omega_1} \right) + S \left( \frac{\partial V_1}{\partial \omega_1} \right) \right] = n^2 a^2 S \left( \frac{\partial R}{\partial \omega_1} \right). \end{aligned} \quad (2.251)$$

Además, reemplazando las Ecs. (2.247) y (2.249) ( $k=2$ ) en la Ec. (2.245) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \omega_2} &= \frac{G m_1 m_2}{\beta a} \left[ \frac{m_1}{m_2} S \left( \frac{\partial U_2}{\partial \omega_2} \right) + S \left( \frac{\partial V_2}{\partial \omega_2} \right) \right] = \frac{G m_1 m_2}{\beta a} S \left( \frac{\partial R}{\partial \omega_2} \right) \\ &= n^2 a^2 \left[ \frac{m_1}{m_2} S \left( \frac{\partial U_2}{\partial \omega_2} \right) + S \left( \frac{\partial V_2}{\partial \omega_2} \right) \right] = n^2 a^2 S \left( \frac{\partial R}{\partial \omega_2} \right) \end{aligned} \quad (2.252)$$

### Longitud del nodo ascendente respecto del ecuador del cuerpo $k$

La derivación con respecto a la longitud del nodo ascendente medido en el plano ecuatorial del cuerpo  $k$  es totalmente análogo a la derivación con respecto a  $i_k$  y a  $\omega_k$ . Se tiene:

$$\frac{\partial R}{\partial \Omega_1} = -\frac{m_2}{\beta} \left( \frac{\partial U_1}{\partial \Omega_1} + \frac{\partial V_1}{\partial \Omega_1} \right) \quad (2.253)$$



y

$$\frac{\partial R}{\partial \delta \Omega_2} = -\frac{m_1}{\beta} \left( \frac{\partial U_2}{\partial \delta \Omega_2} + \frac{\partial V_2}{\partial \delta \Omega_2} \right). \quad (2.254)$$

Siendo, por un lado:

$$\frac{\partial U_1}{\partial \delta \Omega_1} = -\frac{G m_2}{a} S \left( \frac{\partial U_1}{\partial \delta \Omega_1} \right), \quad (2.255)$$

y

$$\frac{\partial U_2}{\partial \delta \Omega_2} = -\frac{G m_1}{a} S \left( \frac{\partial U_2}{\partial \delta \Omega_2} \right), \quad (2.256)$$

donde:

$$\begin{aligned} S \left( \frac{\partial U_k}{\partial \delta \Omega_k} \right) &= \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{h=0}^l \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left( \frac{R_k}{a} \right)^{2l+1} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) \\ &\quad \times F_{lmp}(i_k) G_{lpq}(e) F_{lmh}(i_k) G_{lhs}(e) \\ &\quad \times \left[ \sin \left( v_{lmpq}^{(k)} - v_{lmhs}^{(k)} \right) K_R^{(k)} \left( l, \omega_{lmpq}^{(k)} \right) - \cos \left( v_{lmpq}^{(k)} - v_{lmhs}^{(k)} \right) K_I^{(k)} \left( l, \omega_{lmpq}^{(k)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.257)$$

Por otro lado:

$$\frac{\partial V_k}{\partial \delta \Omega_k} = -\frac{G m_k}{a^2} S \left( \frac{\partial V_k}{\partial \delta \Omega_k} \right), \quad (2.258)$$

donde:

$$\begin{aligned} S \left( \frac{\partial V_k}{\partial \delta \Omega_k} \right) &= \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left( \frac{R_k}{a} \right)^l F_{lmp}(i_k) G_{lpq}(e) m \\ &\quad \left[ -C_{lm}^{(k)} \sin \left( v_{lmpq}^{(k)} - m \theta_k + \phi_{lm} \right) + S_{lm}^{(k)} \cos \left( v_{lmpq}^{(k)} - m \theta_k + \phi_{lm} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.259)$$

Luego, reemplazando las Ecs. (2.255) y (2.258) ( $k = 1$ ) en la Ec. (2.253) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \delta \Omega_1} &= \frac{G m_1 m_2}{\beta a} \left[ \frac{m_2}{m_1} S \left( \frac{\partial U_1}{\partial \delta \Omega_1} \right) + S \left( \frac{\partial V_1}{\partial \delta \Omega_1} \right) \right] = \frac{G m_1 m_2}{\beta a} S \left( \frac{\partial R}{\partial \delta \Omega_1} \right) \\ &= n^2 a^2 \left[ \frac{m_2}{m_1} S \left( \frac{\partial U_1}{\partial \delta \Omega_1} \right) + S \left( \frac{\partial V_1}{\partial \delta \Omega_1} \right) \right] = n^2 a^2 S \left( \frac{\partial R}{\partial \delta \Omega_1} \right) \end{aligned} \quad (2.260)$$

Análogamente, reemplazando las Ecs. (2.256) y (2.258) ( $k = 2$ ) en la Ec. (2.245) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \delta \Omega_2} &= \frac{G m_1 m_2}{\beta a} \left[ \frac{m_1}{m_2} S \left( \frac{\partial U_2}{\partial \delta \Omega_2} \right) + S \left( \frac{\partial V_2}{\partial \delta \Omega_2} \right) \right] = \frac{G m_1 m_2}{\beta a} S \left( \frac{\partial R}{\partial \delta \Omega_2} \right) \\ &= n^2 a^2 \left[ \frac{m_1}{m_2} S \left( \frac{\partial U_2}{\partial \delta \Omega_2} \right) + S \left( \frac{\partial V_2}{\partial \delta \Omega_2} \right) \right] = n^2 a^2 S \left( \frac{\partial R}{\partial \delta \Omega_2} \right) \end{aligned} \quad (2.261)$$

El paso siguiente consiste en reemplazar las Ecs. (2.220), (2.227), (2.234), (2.242), (2.243), (2.251), (2.252), (2.260) y (2.261) en las Ecs. (2.199), (2.200) y (2.201). El resultado es:

$$\frac{da}{dt} = 2 n a S \left( \frac{\partial R}{\partial M} \right), \quad (2.262a)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{n \sqrt{1-e^2}}{e} \left[ \sqrt{1-e^2} S \left( \frac{\partial R}{\partial M} \right) - S \left( \frac{\partial R}{\partial \omega_1} \right) - S \left( \frac{\partial R}{\partial \omega_2} \right) \right], \quad (2.262b)$$

$$\frac{dM}{dt} = n + 2nS\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right) - \frac{n(1-e^2)}{e}S\left(\frac{\partial R}{\partial e}\right), \quad (2.262c)$$

$$\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} = & \frac{Gm_1m_2}{aC_1\dot{\theta}_1\sin i_1} \left[ S\left(\frac{\partial R}{\partial \omega_1}\right) - \cos i_1 S\left(\frac{\partial R}{\partial \delta \Omega_1}\right) \right] \\ & - \frac{n}{\sqrt{1-e^2}} \left( \frac{1}{\sin i_1} \left[ S\left(\frac{\partial R}{\partial \delta \Omega_1}\right) - \cos i_1 S\left(\frac{\partial R}{\partial \omega_1}\right) \right] + \sin(\omega_1 - \omega_2) S\left(\frac{\partial R}{\partial i_2}\right) \right. \\ & \left. + \frac{\cos(\omega_1 - \omega_2)}{\sin i_2} \left[ S\left(\frac{\partial R}{\partial \delta \Omega_2}\right) - \cos i_2 S\left(\frac{\partial R}{\partial \omega_2}\right) \right] \right), \quad (2.262d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{di_2}{dt} = & \frac{Gm_1m_2}{aC_2\dot{\theta}_2\sin i_2} \left[ S\left(\frac{\partial R}{\partial \omega_2}\right) - \cos i_2 S\left(\frac{\partial R}{\partial \delta \Omega_2}\right) \right] \\ & - \frac{n}{\sqrt{1-e^2}} \left( \frac{1}{\sin i_2} \left[ S\left(\frac{\partial R}{\partial \delta \Omega_2}\right) - \cos i_2 S\left(\frac{\partial R}{\partial \omega_2}\right) \right] + \sin(\omega_2 - \omega_1) S\left(\frac{\partial R}{\partial i_1}\right) \right. \\ & \left. + \frac{\cos(\omega_2 - \omega_1)}{\sin i_1} \left[ S\left(\frac{\partial R}{\partial \delta \Omega_1}\right) - \cos i_1 S\left(\frac{\partial R}{\partial \omega_1}\right) \right] \right), \quad (2.262e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dt} = & \frac{Gm_1m_2}{aC_1\dot{\theta}_1\sin i_1} S\left(\frac{\partial R}{\partial i_1}\right) + \frac{n\sqrt{1-e^2}}{e} S\left(\frac{\partial R}{\partial e}\right) \\ & - \frac{n\cos i_1}{\sqrt{1-e^2}\sin i_1} \left( S\left(\frac{\partial R}{\partial i_1}\right) + \cos(\omega_1 - \omega_2) S\left(\frac{\partial R}{\partial i_2}\right) \right. \\ & \left. + \frac{\sin(\omega_1 - \omega_2)}{\sin i_2} \left[ \cos i_2 S\left(\frac{\partial R}{\partial \omega_2}\right) - S\left(\frac{\partial R}{\partial \delta \Omega_2}\right) \right] \right), \quad (2.262f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_2}{dt} = & \frac{Gm_1m_2}{aC_2\dot{\theta}_2\sin i_2} S\left(\frac{\partial R}{\partial i_2}\right) + \frac{n\sqrt{1-e^2}}{e} S\left(\frac{\partial R}{\partial e}\right) \\ & - \frac{n\cos i_2}{\sqrt{1-e^2}\sin i_2} \left( S\left(\frac{\partial R}{\partial i_2}\right) + \cos(\omega_2 - \omega_1) S\left(\frac{\partial R}{\partial i_1}\right) \right. \\ & \left. + \frac{\sin(\omega_2 - \omega_1)}{\sin i_1} \left[ \cos i_1 S\left(\frac{\partial R}{\partial \omega_1}\right) - S\left(\frac{\partial R}{\partial \delta \Omega_1}\right) \right] \right), \quad (2.262g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\delta \Omega_1}{dt} = & \frac{Gm_1m_2}{aC_1\dot{\theta}_1} \left( \cot i_1 S\left(\frac{\partial R}{\partial i_1}\right) + \cot \varepsilon_1 \left[ \sin \delta \Omega_1 \cot i_1 S\left(\frac{\partial R}{\partial \delta \Omega_1}\right) - \cos \delta \Omega_1 S\left(\frac{\partial R}{\partial i_1}\right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\sin \delta \Omega_1}{\sin i_1} S\left(\frac{\partial R}{\partial \omega_1}\right) \right] \right) + \frac{n}{\sqrt{1-e^2}\sin i_1} \left( S\left(\frac{\partial R}{\partial i_1}\right) + \cos(\omega_2 - \omega_1) S\left(\frac{\partial R}{\partial i_2}\right) \right. \\ & \left. + \frac{\sin(\omega_1 - \omega_2)}{\sin i_2} \left[ \cos i_2 S\left(\frac{\partial R}{\partial \omega_2}\right) - S\left(\frac{\partial R}{\partial \delta \Omega_2}\right) \right] \right), \quad (2.262h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\delta \Omega_2}{dt} = & \frac{Gm_1m_2}{aC_2\dot{\theta}_2} \left( \cot i_2 S\left(\frac{\partial R}{\partial i_2}\right) + \cot \varepsilon_2 \left[ \sin \delta \Omega_2 \cot i_2 S\left(\frac{\partial R}{\partial \delta \Omega_2}\right) - \cos \delta \Omega_2 S\left(\frac{\partial R}{\partial i_2}\right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\sin \delta \Omega_2}{\sin i_2} S\left(\frac{\partial R}{\partial \omega_2}\right) \right] \right) + \frac{n}{\sqrt{1-e^2}\sin i_2} \left( S\left(\frac{\partial R}{\partial i_2}\right) + \cos(\omega_1 - \omega_2) S\left(\frac{\partial R}{\partial i_1}\right) \right. \\ & \left. + \frac{\sin(\omega_2 - \omega_1)}{\sin i_1} \left[ \cos i_1 S\left(\frac{\partial R}{\partial \omega_1}\right) - S\left(\frac{\partial R}{\partial \delta \Omega_1}\right) \right] \right), \quad (2.262i) \end{aligned}$$

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = -\frac{G m_1 m_2}{a C_1 \dot{\theta}_1} \left[ \cos \vartheta_{\mathcal{L}_1} \cot i_1 S \left( \frac{\partial R}{\partial \vartheta_{\mathcal{L}_1}} \right) + \sin \vartheta_{\mathcal{L}_1} S \left( \frac{\partial R}{\partial i_1} \right) - \frac{\cos \vartheta_{\mathcal{L}_1}}{\sin i_1} S \left( \frac{\partial R}{\partial \omega_1} \right) \right], \quad (2.262j)$$

$$\frac{d\varepsilon_2}{dt} = -\frac{G m_1 m_2}{a C_2 \dot{\theta}_2} \left[ \cos \vartheta_{\mathcal{L}_2} \cot i_2 S \left( \frac{\partial R}{\partial \vartheta_{\mathcal{L}_2}} \right) + \sin \vartheta_{\mathcal{L}_2} S \left( \frac{\partial R}{\partial i_2} \right) - \frac{\cos \vartheta_{\mathcal{L}_2}}{\sin i_2} S \left( \frac{\partial R}{\partial \omega_2} \right) \right], \quad (2.262k)$$

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = -\frac{G m_1 m_2}{a C_1} S \left( \frac{\partial R}{\partial \vartheta_{\mathcal{L}_1}} \right), \quad (2.262l)$$

y

$$\frac{d^2\theta_2}{dt^2} = -\frac{G m_1 m_2}{a C_2} S \left( \frac{\partial R}{\partial \vartheta_{\mathcal{L}_2}} \right). \quad (2.262m)$$

Las ecuaciones de movimiento así obtenidas adquieren generalidad puesto que se derivan de la construcción de un formalismo desarrollado tomando en consideración tanto la interacción de mareas como la triaxialidad de ambos cuerpos. Además de esto, estas ecuaciones tienen dos características importantes. La primera de ellas es que son válidas para cualquier valor de la excentricidad y de las inclinaciones. La segunda es que, como se han escrito en términos de productos entre factores dimensionales y sumas de términos adimensionales, por un lado resulta sencillo verificar si las unidades de cada derivada son correctas y, por otro lado, también se simplifica su expresión computacional para su posterior aplicación en el modelado y simulación de diversos sistemas. Ahora bien, obviamente es imposible lograr la expresión computacional de dichas ecuaciones. Resulta entonces necesario considerar algunas aproximaciones. En primer lugar, dado que generalmente en el estudio de la dinámica orbital de sistemas planetarios se centra la atención en la evolución de dichos sistemas a largo plazo, se van a considerar solamente los términos seculares de los potenciales perturbadores. En el caso de los potenciales de mareas generados por cada cuerpo, los términos antes mencionados son los que verifican  $h = p$  y  $s = q$  en las Ecs. (2.217), (2.224), (2.231), (2.239), (2.248) y (2.257). En el caso de los potenciales debido a la distribución permanente e inhomogénea de masa, se consideran los términos seculares asociados solamente al coeficiente  $J_2$  (Kozai, 1959; Kaula, 2000). En lo que respecta a la evolución rotacional, más específicamente a la evolución temporal de los ángulos de rotación propios ( $\theta_k$ ), también se acostumbra a considerar la evolución debida a los términos seculares del torque de mareas (Efroimsky, 2012; Makarov, 2012; Makarov *et al.*, 2012; Noyelles *et al.*, 2014; Veras *et al.*, 2019). Sin embargo, existe una diferencia fundamental con respecto a la dinámica orbital: un cuerpo celeste rotando puede quedar capturado en una resonancia espín-órbita, es decir, puede ocurrir que el cociente entre la velocidad de rotación del mismo y la frecuencia orbital media sea igual a un número racional. Si se considera la evolución rotacional debida solamente a los términos seculares del torque mareal, entonces (dadas las condiciones iniciales) se puede determinar si un planeta puede quedar capturado en una de dichas resonancias o no. En cambio, si se considera también el llamado torque triaxial —del cual se va a tratar más adelante— las capturas antes mencionadas pasan a ser un hecho probabilístico en lugar de determinista. Sobre esto también se va a discutir más adelante. El torque triaxial antes

mencionado, está relacionado con el coeficiente  $C_{22}$  del potencial gravitatorio generado por las distribuciones inhomogéneas de masa. Por lo tanto, para el estudio de la dinámica rotacional, también se van a considerar los términos relacionados con dicho coeficiente. En resumen, de los infinitos términos que componen los potenciales  $V_1$  y  $V_2$  los únicos que tendrán relevancia en el contexto del presente trabajo son los términos seculares relacionados con  $J_2$  y con  $C_{22}$  que, como se verá más adelante, estos últimos son de naturaleza puramente oscilatoria.

Si bien se indicó anteriormente que se van a considerar solamente los términos seculares de los potenciales perturbativos de mareas y aquellos relacionados con el coeficiente  $J_2$  para el estudio de la dinámica orbital, puede observarse que las Ecs. (2.262) aún contienen términos oscilatorios, es decir, aquellos que contienen senos y cosenos de  $\omega_k$  y  $\Omega_k$ . Por lo tanto, la eliminación de los mismos requiere llevar a cabo un promediado explícito de las ecuaciones correspondientes. El resultado de esta operación es:

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = 2na \left\langle S \left( \frac{\partial R}{\partial M} \right) \right\rangle, \quad (2.263a)$$

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = \frac{n\sqrt{1-e^2}}{e} \left[ \sqrt{1-e^2} \left\langle S \left( \frac{\partial R}{\partial M} \right) \right\rangle - \left\langle S \left( \frac{\partial R}{\partial \omega_1} \right) \right\rangle - \left\langle S \left( \frac{\partial R}{\partial \omega_2} \right) \right\rangle \right], \quad (2.263b)$$

$$\left\langle \frac{dM}{dt} \right\rangle = n + 2n \left\langle S \left( \frac{\partial R}{\partial a} \right) \right\rangle - \frac{n(1-e^2)}{e} \left\langle S \left( \frac{\partial R}{\partial e} \right) \right\rangle, \quad (2.263c)$$

$$\left\langle \frac{di_1}{dt} \right\rangle = \frac{Gm_1m_2}{aC_1\dot{\theta}_1\sin i_1} \left[ \left\langle S \left( \frac{\partial R}{\partial \omega_1} \right) \right\rangle - \cos i_1 \left\langle S \left( \frac{\partial R}{\partial \Omega_1} \right) \right\rangle \right] - \frac{n}{\sqrt{1-e^2}\sin i_1} \left[ \left\langle S \left( \frac{\partial R}{\partial \Omega_1} \right) \right\rangle - \cos i_1 \left\langle S \left( \frac{\partial R}{\partial \omega_1} \right) \right\rangle \right], \quad (2.263d)$$

$$\left\langle \frac{di_2}{dt} \right\rangle = \frac{Gm_1m_2}{aC_2\dot{\theta}_2\sin i_2} \left[ \left\langle S \left( \frac{\partial R}{\partial \omega_2} \right) \right\rangle - \cos i_2 \left\langle S \left( \frac{\partial R}{\partial \Omega_2} \right) \right\rangle \right] - \frac{n}{\sqrt{1-e^2}\sin i_2} \left[ \left\langle S \left( \frac{\partial R}{\partial \Omega_2} \right) \right\rangle - \cos i_2 \left\langle S \left( \frac{\partial R}{\partial \omega_2} \right) \right\rangle \right], \quad (2.263e)$$

$$\left\langle \frac{d\omega_1}{dt} \right\rangle = \frac{Gm_1m_2}{aC_1\dot{\theta}_1\sin i_1} \left\langle S \left( \frac{\partial R}{\partial i_1} \right) \right\rangle + \frac{n\sqrt{1-e^2}}{e} \left\langle S \left( \frac{\partial R}{\partial e} \right) \right\rangle - \frac{n\cos i_1}{\sqrt{1-e^2}\sin i_1} \left\langle S \left( \frac{\partial R}{\partial i_1} \right) \right\rangle, \quad (2.263f)$$

$$\left\langle \frac{d\omega_2}{dt} \right\rangle = \frac{Gm_1m_2}{aC_2\dot{\theta}_2\sin i_2} \left\langle S \left( \frac{\partial R}{\partial i_2} \right) \right\rangle + \frac{n\sqrt{1-e^2}}{e} \left\langle S \left( \frac{\partial R}{\partial e} \right) \right\rangle - \frac{n\cos i_2}{\sqrt{1-e^2}\sin i_2} \left\langle S \left( \frac{\partial R}{\partial i_2} \right) \right\rangle, \quad (2.263g)$$

$$\left\langle \frac{d\Omega_1}{dt} \right\rangle = \frac{G m_1 m_2}{a C_1 \dot{\theta}_1} \cot i_1 \left\langle S \left( \frac{\partial R}{\partial i_1} \right) \right\rangle + \frac{n}{\sqrt{1-e^2} \sin i_1} \left\langle S \left( \frac{\partial R}{\partial i_1} \right) \right\rangle, \quad (2.263h)$$

$$\left\langle \frac{d\Omega_2}{dt} \right\rangle = \frac{G m_1 m_2}{a C_2 \dot{\theta}_2} \cot i_2 \left\langle S \left( \frac{\partial R}{\partial i_2} \right) \right\rangle + \frac{n}{\sqrt{1-e^2} \sin i_2} \left\langle S \left( \frac{\partial R}{\partial i_2} \right) \right\rangle, \quad (2.263i)$$

donde los corchetes rectangulares que encierran los símbolos de las sumatorias de los términos adimensionales indican que se consideran solamente los términos seculares de los potenciales perturbadores correspondientes.

En virtud de las Ecs. (2.220), (2.227) y (2.234), se tiene:

$$\begin{aligned} \left\langle S \left( \frac{\partial R}{\partial(a, e, M)} \right) \right\rangle &= \frac{m_2}{m_1} \left\langle S \left( \frac{\partial U_1}{\partial(a, e, M)} \right) \right\rangle + \left\langle S \left( \frac{\partial V_1}{\partial(a, e, M)} \right) \right\rangle \\ &\quad + \frac{m_1}{m_2} \left\langle S \left( \frac{\partial U_2}{\partial(a, e, M)} \right) \right\rangle + \left\langle S \left( \frac{\partial V_2}{\partial(a, e, M)} \right) \right\rangle \end{aligned} \quad (2.264)$$

donde

$$\begin{aligned} \left\langle S \left( \frac{\partial U_k}{\partial a} \right) \right\rangle &= \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} (l+1) \left( \frac{R_k}{a} \right)^{2l+1} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) \\ &\quad \times F_{lmp}^2(i_k) G_{lpq}^2(e) K_R^{(k)} \left( l, \omega_{lmpq}^{(k)} \right), \end{aligned} \quad (2.265)$$

$$\begin{aligned} \left\langle S \left( \frac{\partial U_k}{\partial e} \right) \right\rangle &= \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left( \frac{R_k}{a} \right)^{2l+1} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) \\ &\quad \times F_{lmp}^2(i_k) G_{lpq}(e) \frac{dG_{lpq}(e)}{de} K_R^{(k)} \left( l, \omega_{lmpq}^{(k)} \right) \end{aligned} \quad (2.266)$$

y

$$\begin{aligned} \left\langle S \left( \frac{\partial U_k}{\partial M} \right) \right\rangle &= - \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left( \frac{R_k}{a} \right)^{2l+1} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) \\ &\quad \times F_{lmp}^2(i_k) G_{lpq}^2(e) K_I^{(k)} \left( l, \omega_{lmpq}^{(k)} \right) (l - 2p + q). \end{aligned} \quad (2.267)$$

En lo que concierne a las derivadas del potencial perturbador con respecto a  $i_k$ ,  $\omega_k$  y  $\Omega_k$  por un lado, a partir de las Ecs. (2.242), (2.251) y (2.260) y, por otro lado, mediante las Ecs. (2.243), (2.252) y (2.261), se tiene que:

$$\left\langle S \left( \frac{\partial R}{\partial(i_1, \omega_1, \Omega_1)} \right) \right\rangle = \frac{m_2}{m_1} \left\langle S \left( \frac{\partial U_1}{\partial(i_1, \omega_1, \Omega_1)} \right) \right\rangle + \left\langle S \left( \frac{\partial V_1}{\partial(i_1, \omega_1, \Omega_1)} \right) \right\rangle \quad (2.268)$$

y

$$\left\langle S \left( \frac{\partial R}{\partial(i_2, \omega_2, \Omega_2)} \right) \right\rangle = \frac{m_1}{m_2} \left\langle S \left( \frac{\partial U_2}{\partial(i_2, \omega_2, \Omega_2)} \right) \right\rangle + \left\langle S \left( \frac{\partial V_2}{\partial(i_2, \omega_2, \Omega_2)} \right) \right\rangle \quad (2.269)$$

donde:

$$\begin{aligned} \left\langle S \left( \frac{\partial U_k}{\partial i_k} \right) \right\rangle &= \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left( \frac{R_k}{a} \right)^{2l+1} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) \\ &\quad \times F_{lmp}(i_k) \frac{dF_{lmp}(i_k)}{di_k} G_{lpq}^2(e) K_R^{(k)} \left( l, \omega_{lmpq}^{(k)} \right). \end{aligned} \quad (2.270)$$

$$\left\langle S \left( \frac{\partial U_k}{\partial \omega_k} \right) \right\rangle = - \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left( \frac{R_k}{a} \right)^{2l+1} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) \\ \times F_{lmp}^2(i_k) G_{lpq}^2(e) K_I^{(k)} \left( l, \omega_{lmpq}^{(k)} \right) (l-2p). \quad (2.271)$$

$$\left\langle S \left( \frac{\partial U_k}{\partial \Omega_k} \right) \right\rangle = - \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left( \frac{R_k}{a} \right)^{2l+1} m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) \\ \times F_{lmp}^2(i_k) G_{lpq}^2(e) K_I^{(k)} \left( l, \omega_{lmpq}^{(k)} \right). \quad (2.272)$$

Las expresiones de los términos seculares de las sumas adimensionales correspondientes a los potenciales perturbadores debidos a las distribuciones inhomogéneas y permanentes de masa se desarrollarán en la siguiente sección.

Si se reemplazan las Ecs. (2.264), (2.268) y (2.269) en las Ecs. (2.263) no es difícil mostrar que cada una de estas últimas pueden escribirse como sumas de la variación temporal de cada elemento orbital correspondiente debidas a la interacción de mareas y a los potenciales expresados en función de los coeficientes de los campos gravitatorios correspondientes a cada cuerpo (CCG) —originados por las distribuciones inhomogéneas y permanentes de masa—. Esto es:

$$\left\langle \frac{dC_i}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{dC_i}{dt} \right\rangle^{\text{mareas}} + \left\langle \frac{dC_i}{dt} \right\rangle^{\text{CCG}} \quad (2.273)$$

donde, por supuesto,  $C_i = (a, e, M, i_k, \omega_k, \Omega_k)$ . Obviamente, se puede llegar a esta misma conclusión considerando también los términos oscilatorios de los gradientes de los potenciales perturbadores.

A modo de ejemplo, considérese el primer término del lado derecho de la Ec. (2.273), es decir, la evolución temporal de los elementos orbitales debido solamente a la interacción de mareas. Esto es equivalente a descartar, por un lado, el segundo y el cuarto término de la Ec. (2.264) y, por otro lado, el segundo término de las Ecs. (2.268) y (2.269). Reemplazando entonces dichas ecuaciones con los términos restantes en las Ecs. (2.263), se obtiene:

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle^{\text{mareas}} = 2na \left[ \frac{m_2}{m_1} \left\langle S \left( \frac{\partial U_1}{\partial M} \right) \right\rangle + \frac{m_1}{m_2} \left\langle S \left( \frac{\partial U_2}{\partial M} \right) \right\rangle \right], \quad (2.274a)$$

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle^{\text{mareas}} = \frac{n\sqrt{1-e^2}}{e} \left( \sqrt{1-e^2} \left[ \frac{m_2}{m_1} \left\langle S \left( \frac{\partial U_1}{\partial M} \right) \right\rangle + \frac{m_1}{m_2} \left\langle S \left( \frac{\partial U_2}{\partial M} \right) \right\rangle \right] \right. \\ \left. - \left[ \frac{m_2}{m_1} \left\langle S \left( \frac{\partial U_1}{\partial \omega_1} \right) \right\rangle + \frac{m_1}{m_2} \left\langle S \left( \frac{\partial U_2}{\partial \omega_2} \right) \right\rangle \right] \right), \quad (2.274b)$$

$$\left\langle \frac{dM}{dt} \right\rangle^{\text{mareas}} = n + 2n \left[ \frac{m_2}{m_1} \left\langle S \left( \frac{\partial U_1}{\partial a} \right) \right\rangle + \frac{m_1}{m_2} \left\langle S \left( \frac{\partial U_2}{\partial a} \right) \right\rangle \right] \\ - \frac{n(1-e^2)}{e} \left[ \frac{m_2}{m_1} \left\langle S \left( \frac{\partial U_1}{\partial e} \right) \right\rangle + \frac{m_1}{m_2} \left\langle S \left( \frac{\partial U_2}{\partial e} \right) \right\rangle \right] \quad (2.274c)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{di_1}{dt} \right\rangle^{\text{mareas}} &= \frac{G m_1 m_2}{a C_1 \dot{\theta}_1 \sin i_1} \frac{m_2}{m_1} \left[ \left\langle S \left( \frac{\partial U_1}{\partial \omega_1} \right) \right\rangle - \cos i_1 \left\langle S \left( \frac{\partial U_1}{\partial \delta \Omega_1} \right) \right\rangle \right] \\ &\quad - \frac{n}{\sqrt{1-e^2}} \frac{1}{\sin i_1} \frac{m_2}{m_1} \left[ \left\langle S \left( \frac{\partial U_1}{\partial \delta \Omega_1} \right) \right\rangle - \cos i_1 \left\langle S \left( \frac{\partial U_1}{\partial \omega_1} \right) \right\rangle \right], \quad (2.274d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{di_2}{dt} \right\rangle^{\text{mareas}} &= \frac{G m_1 m_2}{a C_2 \dot{\theta}_2 \sin i_2} \frac{m_1}{m_2} \left[ \left\langle S \left( \frac{\partial U_2}{\partial \omega_2} \right) \right\rangle - \cos i_2 \left\langle S \left( \frac{\partial U_2}{\partial \delta \Omega_2} \right) \right\rangle \right] \\ &\quad - \frac{n}{\sqrt{1-e^2}} \frac{1}{\sin i_2} \frac{m_1}{m_2} \left[ \left\langle S \left( \frac{\partial U_2}{\partial \delta \Omega_2} \right) \right\rangle - \cos i_2 \left\langle S \left( \frac{\partial U_2}{\partial \omega_2} \right) \right\rangle \right], \quad (2.274e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\omega_1}{dt} \right\rangle^{\text{mareas}} &= -\frac{G m_1 m_2}{a C_1 \dot{\theta}_1 \sin i_1} \frac{m_2}{m_1} \left\langle S \left( \frac{\partial U_1}{\partial i_1} \right) \right\rangle + \frac{n\sqrt{1-e^2}}{e} \left[ \frac{m_2}{m_1} \left\langle S \left( \frac{\partial U_1}{\partial e} \right) \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_1}{m_2} \left\langle S \left( \frac{\partial U_2}{\partial e} \right) \right\rangle \right] - \frac{n \cos i_1}{\sqrt{1-e^2} \sin i_1} \frac{m_2}{m_1} \left\langle S \left( \frac{\partial U_1}{\partial i_1} \right) \right\rangle, \quad (2.274f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\omega_2}{dt} \right\rangle^{\text{mareas}} &= -\frac{G m_1 m_2}{a C_2 \dot{\theta}_2 \sin i_2} \frac{m_1}{m_2} \left\langle S \left( \frac{\partial U_2}{\partial i_2} \right) \right\rangle + \frac{n\sqrt{1-e^2}}{e} \left[ \frac{m_2}{m_1} \left\langle S \left( \frac{\partial U_1}{\partial e} \right) \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_1}{m_2} \left\langle S \left( \frac{\partial U_2}{\partial e} \right) \right\rangle \right] - \frac{n \cos i_2}{\sqrt{1-e^2} \sin i_2} \frac{m_1}{m_2} \left\langle S \left( \frac{\partial U_2}{\partial i_2} \right) \right\rangle, \quad (2.274g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\delta \Omega_1}{dt} \right\rangle^{\text{mareas}} &= \frac{G m_1 m_2}{a C_1 \dot{\theta}_1} \frac{m_2}{m_1} \cot i_1 \left\langle S \left( \frac{\partial U_1}{\partial i_1} \right) \right\rangle \\ &\quad + \frac{n}{\sqrt{1-e^2} \sin i_1} \frac{m_2}{m_1} \left\langle S \left( \frac{\partial U_1}{\partial i_1} \right) \right\rangle, \quad (2.274h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\delta \Omega_2}{dt} \right\rangle^{\text{mareas}} &= \frac{G m_1 m_2}{a C_2 \dot{\theta}_2} \frac{m_1}{m_2} \cot i_2 \left\langle S \left( \frac{\partial U_2}{\partial i_2} \right) \right\rangle \\ &\quad + \frac{n}{\sqrt{1-e^2} \sin i_2} \frac{m_1}{m_2} \left\langle S \left( \frac{\partial U_2}{\partial i_2} \right) \right\rangle. \quad (2.274i) \end{aligned}$$

Es importante destacar aquí que estas expresiones también son validas si se consideran tanto los términos seculares como los oscilatorios de los gradientes de los potenciales perturbadores originados por las mareas en ambos cuerpos.

Con respecto a la evolución rotacional, puede verse que las ecuaciones que dan la derivada temporal de  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  no contienen términos seculares, es decir, su promedio temporal es cero. Más adelante se tratarán en detalle las ecuaciones que dan las aceleraciones angulares.

## 2.5. Construcción del modelo dinámico

Hasta este punto, solamente se han tenido en cuenta aspectos generales de las ecuaciones de movimiento. El siguiente paso será, naturalmente, obtener expresiones de las



mismas que sean adecuadas para cumplir con uno de los objetivos centrales planteados en este trabajo: estudiar la evolución dinámica de un sistema binario compuesto por un planeta rocoso y su estrella anfitriona. Por lo tanto, resulta necesario que en este punto se establezca y se exponga de forma clara el modelo teórico construido para tal fin.

En primer lugar, se utiliza la aproximación cuadrupolar, es decir, se consideran todos los términos con  $l = 2$ . Esta elección, en principio, está justificada porque se van a considerar valores suficientemente bajos para la excentricidad (Boué y Efroimsky, 2019). En segundo lugar, se van a considerar también inclinaciones bajas o muy bajas. Si bien en nuestro sistema solar se observa que los planetas se encuentran en órbitas que son casi coplanares entre sí y con el plano del ecuador del Sol (Murray y Dermott, 1999), quizás sea demasiado aventurado afirmar que cabe esperar que esta estructura se repita en los sistemas planetarios extrasolares. En lugar de presentar esta consideración de inclinaciones bajas como una aproximación, resulta más conveniente incluirla como una suposición dado que se desconocen los valores de las inclinaciones orbitales de las exotierras. En este sentido, una manera de trabajar es fijar valores arbitrarios para estimar escalas de la evolución temporal de las inclinaciones u oblicuidades. Por último, solamente se va a considerar la triaxialidad del planeta. Esto implica, por un lado, que si  $A_2$ ,  $B_2$  y  $C_2$  son los momentos principales de inercia del último con respecto a los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente, se asume que  $A_2 < B_2 < C_2$ . Para la estrella, en cambio se supone que  $A_1 = B_1$ , con lo cual se anulan todos los términos relacionados con el coeficiente  $C_{22}$  del campo gravitatorio de la misma. Por supuesto, aún va a ser necesario estimar el valor de  $C_2$ , dado que aparece explícitamente en las ecuaciones de movimiento. Por otro lado, se va a considerar solamente la influencia del coeficiente  $J_2$  del planeta. En esta primera aproximación al problema planteado en este trabajo se desprecia el efecto de  $J_2$  correspondiente al campo gravitatorio de la estrella, si bien su influencia en la dinámica podría ser importante (G. Boué, comunicación personal, 20 de febrero de 2020).

En virtud de que se van a considerar (o suponer) inclinaciones y excentricidades bajas, a continuación se van a presentar algunas aproximaciones disponibles para tales casos. Las funciones de la inclinación están definidas mediante la expresión (Gooding y Wagner, 2008):

$$F_{lmp}(i) = \frac{(l+m)!}{2^l(l-p)!p!} \times \sum_j (-1)^j \binom{2l-2p}{j} \binom{2p}{l-m-j} \cos^{3l-m-2p-2j} \left( \frac{i}{2} \right) \sin^{m-l+2p+2j} \left( \frac{i}{2} \right), \quad (2.275)$$

En la Tabla 2.2 se muestran específicamente las funciones correspondientes a  $l = 2$ , así como también sus derivadas primeras. En la misma puede observarse que solamente  $F_{201}(i)$  y  $F_{220}(i)$  tienden a valores no nulos a medida que la inclinación tiende a cero. En consecuencia, de todos los términos de los potenciales adicionales de mareas, cada uno de ellos etiquetado con cuatro índices ( $lmpq$ ), los más importantes a bajas inclinaciones van a ser aquellos correspondientes a  $(lmpq) = (201q)$  y  $(lmpq) = (220q)$ . Por supuesto, esto último también vale para el potencial debido a la distribución inhomogénea y permanente de masa en el interior del planeta que, coincidentemente, corresponde a los términos asociados a los coeficientes  $J_2$  y  $C_{22}$ .

A fin de hacer posible la implementación de las ecuaciones de movimiento, resulta necesario discutir acerca del truncamiento de las series en  $q$ . En términos generales, las



**Tabla 2.2:** Funciones de la inclinación para  $l = 2$  y sus derivadas primeras.

$m$	$p$	$F_{2mp}(i)$	$\frac{dF_{2mp}(i)}{di}$	$\frac{1}{\sin i} \left( F_{2mp}(i) \frac{dF_{2mp}(i)}{di} \right)$
0	0	$\frac{3}{8} \sin^2 i$	$\frac{3}{4} \sin i \cos i$	$\frac{9}{32} \sin^2 i \cos i$
0	1	$-\frac{3}{4} \sin^2 i + \frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2} \sin i \cos i$	$-\frac{3}{2} \cos i \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \sin^2 i \right)$
0	2	$\frac{3}{8} \sin^2 i$	$\frac{3}{4} \sin i \cos i$	$\frac{9}{32} \sin^2 i \cos i$
1	0	$-\frac{3}{4} (1 + \cos i) \sin i$	$-\frac{3}{4} [\cos i + \cos(2i)]$	$\frac{9}{16} (1 + \cos i) [\cos i + \cos(2i)]$
1	1	$\frac{3}{2} \sin i \cos i$	$\frac{3}{2} \cos(2i)$	$\frac{9}{4} \cos i \cos(2i)$
1	2	$\frac{3}{4} (1 - \cos i) \sin i$	$\frac{3}{4} [\cos i - \cos(2i)]$	$\frac{9}{16} (1 - \cos i) [\cos i - \cos(2i)]$
2	0	$\frac{3}{4} (1 + \cos i)^2$	$-\frac{3}{2} (1 + \cos i) \sin i$	$-\frac{9}{8} (1 + \cos i)^3$
2	1	$\frac{3}{2} \sin^2 i$	$3 \sin i \cos i$	$\frac{9}{2} \sin^2 i \cos i$
2	2	$\frac{3}{4} (1 - \cos i)^2$	$\frac{3}{2} (1 - \cos i) \sin i$	$\frac{9}{8} (1 - \cos i)^3$

funciones de la excentricidad se definen mediante:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{-(l+1)} \exp[i(l-2p)\nu] = \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{lpq}(e) \exp[i(l-2p+q)M], \quad (2.276)$$

donde:

$$\frac{r}{a} = \frac{1-e^2}{1+e \cos f}. \quad (2.277)$$

Así, las funciones de la excentricidad quedan definidas como los coeficientes de la expansión en series de Fourier de la función que se encuentra en el lado izquierdo de la Ec. (2.276). Por supuesto, las derivadas de las  $G_{lpq}$  también son necesarias, tal como puede verse en las Ecs. (2.224) y (2.226). Estas pueden definirse de forma análoga como los coeficientes de la expansión en series de Fourier de la derivada de la función del lado izquierdo de la Ec. (2.276) con respecto a la excentricidad, esto es:

$$\frac{\partial}{\partial e} \left[ \left(\frac{r}{a}\right)^{-(l+1)} \exp[i(l-2p)f] \right] = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{dG_{lpq}(e)}{de} \exp[i(l-2p+q)M], \quad (2.278)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial e} \left[ \left(\frac{r}{a}\right)^{-(l+1)} \exp[i(l-2p)f] \right] &= \left(\frac{r}{a}\right)^{-(l+1)} \left[ (l+1) \left( \frac{2e}{1-e^2} + \frac{\cos f - e \frac{\partial f}{\partial e} \sin f}{1+e \cos f} \right) \right. \\ &\quad \left. + i(l-2p) \frac{\partial f}{\partial e} \right] \exp[i(l-2p)f], \end{aligned} \quad (2.279)$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial e} = \frac{\sin f}{1-e^2} (2+e \cos f). \quad (2.280)$$

Las expresiones correspondientes a  $(lmpq) = (201q)$  son:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{-3} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{21q}(e) \cos(qM), \quad (2.281)$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{-3} 3 \left( \frac{2e}{1-e^2} + \frac{\cos f - e \frac{\partial f}{\partial e} \sin f}{1+e \cos f} \right) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{dG_{21q}(e)}{de} \cos(qM). \quad (2.282)$$

**Tabla 2.3:** RMSD entre los lados izquierdo y derecho de las Eqs. (2.281), (2.282), (2.283) y (2.284). Las columnas cuatro a siete corresponden a las partes real (Re) e imaginaria (Im) de las ecuaciones antes mencionadas, respectivamente. Estos resultados se obtuvieron para  $e = 0,1$ .

$q_{\max}$	RMSD					
	(2.281)	(2.282)	Re (2.283)	Im (2.283)	Re (2.284)	Im (2.284)
2	$4,757 \times 10^{-3}$	$1,443 \times 10^{-1}$	$1,237 \times 10^{-2}$	$1,237 \times 10^{-2}$	$3,705 \times 10^{-1}$	$3,704 \times 10^{-1}$
4	$9,885 \times 10^{-5}$	$4,963 \times 10^{-3}$	$4,149 \times 10^{-4}$	$4,148 \times 10^{-4}$	$2,065 \times 10^{-2}$	$2,065 \times 10^{-2}$
6	$1,997 \times 10^{-6}$	$1,399 \times 10^{-4}$	$1,175 \times 10^{-5}$	$1,175 \times 10^{-5}$	$8,183 \times 10^{-4}$	$8,183 \times 10^{-4}$
8	$4,065 \times 10^{-8}$	$3,563 \times 10^{-6}$	$3,117 \times 10^{-7}$	$3,052 \times 10^{-7}$	$2,708 \times 10^{-5}$	$2,717 \times 10^{-5}$
10	$1,001 \times 10^{-8}$	$1,142 \times 10^{-7}$	$7,274 \times 10^{-8}$	$1,078 \times 10^{-7}$	$9,280 \times 10^{-7}$	$9,066 \times 10^{-7}$
12	$9,977 \times 10^{-9}$	$7,538 \times 10^{-8}$	$7,213 \times 10^{-8}$	$1,076 \times 10^{-7}$	$4,663 \times 10^{-7}$	$4,368 \times 10^{-7}$

Mientras que aquellas correspondientes a  $(lmpq) = (220q)$  son:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{-3} \begin{bmatrix} \cos \\ \sin \end{bmatrix} (2\nu) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{20q}(e) \begin{bmatrix} \cos \\ \sin \end{bmatrix} [(2+q)M], \quad (2.283)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{a}\right)^{-3} \left[ 3 \left( \frac{2e}{1-e^2} + \frac{\cos \nu - e \frac{\partial \nu}{\partial e} \sin \nu}{1 + e \cos \nu} \right) \begin{bmatrix} \cos \\ \sin \end{bmatrix} (2\nu) + 2 \frac{\partial \nu}{\partial e} \begin{bmatrix} -\sin \\ \cos \end{bmatrix} (2\nu) \right] = \\ \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{dG_{20q}}{de}(e) \begin{bmatrix} \cos \\ \sin \end{bmatrix} [(2+q)M]. \end{aligned} \quad (2.284)$$

El problema de determinar cuántos términos se deben conservar para obtener una representación suficientemente precisa de las funciones en los lados izquierdos de las Ecs. (2.281), (2.282), (2.283) y (2.284) puede resolverse comparando con sus representaciones en series de Fourier presentes en los lados derechos de las respectivas ecuaciones. El criterio adoptado en este trabajo fue calcular la raíz cuadrada del valor medio de las diferencias al cuadrado (RMSD, por sus siglas en inglés) entre los lados izquierdo y derecho antes mencionados correspondientes a distintos valores de  $q_{\max}$ , siendo este el número máximo de términos de dichas expansiones. Expresado matemáticamente:

$$\text{RMSD} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N [g(e, f_i) - \tilde{g}(e, M_i)]^2}{N}} \quad (2.285)$$

donde  $g(e, f_i)$  representa el lado izquierdo de las Ecs. (2.281), (2.282), (2.283) y (2.284), mientras que  $\tilde{g}(e, M_i)$  corresponde a los respectivos lados derechos de las mismas.  $N$  es el número de valores de las anomalías verdadera y media dentro del intervalo  $[-\pi; \pi]$ , cada uno de ellos etiquetado con  $f_i$  y  $M_i$ , respectivamente.

Por supuesto, el número máximo de términos de las expansiones en series de Fourier depende fuertemente de la excentricidad. En la Tabla 2.3 se muestran los valores obtenidos del RMSD para  $e = 0,1$ . Tal como puede observarse, no hay variación significativa para  $q_{\max} \geq 10$  por lo que resulta seguro tomar  $q_{\max} = 10$ .

Cabe destacar que las funciones de la excentricidad —dado que son idénticas a los coeficientes de Hansen  $X_{\kappa}^{\nu, \mu}(e)$ — y sus derivadas, se calcularon utilizando los operadores

de Newcomb ([Murray y Dermott, 1999](#)); esto es, los  $X_{\kappa}^{\nu,\mu}(e)$ , al igual que las funciones de la excentricidad, se definen mediante:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{\nu} \exp(i\mu f) = \sum_{\kappa} X_{\kappa}^{\nu,\mu}(e) \exp(i\kappa M). \quad (2.286)$$

Para  $e < 1$ , los coeficientes de Hansen pueden calcularse como series de potencias de la excentricidad ([Hughes, 1981](#)):

$$X_{\kappa}^{\nu,\mu}(e) = e^{|\mu-\kappa|} \sum_{j=0}^{\infty} N_{\rho,\sigma}^{\nu,\mu} e^{2j} \quad (2.287)$$

donde  $\rho = j + \max(0, \kappa - \mu)$ ,  $\sigma = j + \max(0, \mu - \kappa)$  y  $N_{\rho,\sigma}^{\nu,\mu}$  son los operadores de Newcomb los cuales, a su vez, se pueden calcular recursivamente mediante ([Proulx y McClain, 1988](#)):

$$\begin{aligned} 4(\rho + \sigma) N_{\rho,\sigma}^{\nu,\mu} = & 2(2\mu - \nu) N_{\rho-1,\sigma}^{\nu,\mu+1} - 2(2\mu + \nu) N_{\rho,\sigma-1}^{\nu,\mu-1} \\ & + (\mu - \nu) N_{\rho-2,\sigma}^{\nu,\mu+2} - (\mu + \nu) N_{\rho,\sigma-2}^{\nu,\mu-2} \\ & + 2(2\rho + 2\sigma - 4 - \nu) N_{\rho-1,\sigma-1}^{\nu,\mu} \end{aligned} \quad (2.288)$$

Si  $\sigma > \rho$  entonces  $N_{\rho,\sigma}^{\nu,\mu} = N_{\sigma,\rho}^{\nu,-\mu}$ . La recursión se inicia considerando que  $N_{\rho,\sigma}^{\nu,\mu} = 0$  si  $\rho < 0$  o  $\sigma < 0$  y que  $N_{0,0}^{\nu,\mu} = 1$ .

En virtud de las discusiones anteriores, resulta posible retornar a las ecuaciones de movimiento a fin de darle la forma adecuada para obtener la expresión computacional del modelo construido en este trabajo de tesis. Considérese nuevamente la Ec. (2.273), más precisamente el segundo término del lado derecho. Las ecuaciones que dan la evolución temporal de los elementos orbitales debido a los términos seculares del potencial perturbador  $V_2$  —aquellos relacionados con el coeficiente  $J_2$ —, pueden obtenerse de forma análoga al procedimiento seguido para llegar a las Ecs. (2.274). Es decir, considerando, por un lado, solamente el cuarto término de la Ec. (2.264) y, por otro lado, el segundo término de la Ec. (2.269), y reemplazando las mismas en las Ecs. (2.263), el resultado es:

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle^{\text{CCG}} = 2na \left\langle S \left( \frac{\partial V_2}{\partial M} \right) \right\rangle, \quad (2.289a)$$

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle^{\text{CCG}} = \frac{n\sqrt{1-e^2}}{e} \left[ \sqrt{1-e^2} \left\langle S \left( \frac{\partial V_2}{\partial M} \right) \right\rangle - \left\langle S \left( \frac{\partial V_2}{\partial \omega_2} \right) \right\rangle \right], \quad (2.289b)$$

$$\left\langle \frac{dM_0}{dt} \right\rangle^{\text{CCG}} = 2n \left\langle S \left( \frac{\partial V_2}{\partial a} \right) \right\rangle - \frac{n(1-e^2)}{e} \left\langle S \left( \frac{\partial V_2}{\partial e} \right) \right\rangle, \quad (2.289c)$$

$$\left\langle \frac{di_1}{dt} \right\rangle^{\text{CCG}} = 0, \quad (2.289d)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{di_2}{dt} \right\rangle^{(\text{tri})} = & \frac{G m_1 m_2}{a C_2 \dot{\theta}_2 \sin i_2} \left[ \left\langle S \left( \frac{\partial V_2}{\partial \omega_2} \right) \right\rangle - \cos i_2 \left\langle S \left( \frac{\partial V_2}{\partial \delta \Omega_2} \right) \right\rangle \right] \\ & - \frac{n}{\sqrt{1-e^2} \sin i_1} \left[ \left\langle S \left( \frac{\partial V_2}{\partial \delta \Omega_2} \right) \right\rangle - \cos i_2 \left\langle S \left( \frac{\partial V_2}{\partial \omega_2} \right) \right\rangle \right]. \end{aligned} \quad (2.289e)$$

$$\left\langle \frac{d\omega_1}{dt} \right\rangle^{\text{CCG}} = \frac{n\sqrt{1-e^2}}{e} \left\langle S \left( \frac{\partial V_2}{\partial e} \right) \right\rangle, \quad (2.289f)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\omega_2}{dt} \right\rangle^{\text{CCG}} = & - \left[ \frac{G m_1 m_2}{a C_2 \dot{\theta}_2 \sin i_2} + \frac{n \cos i_2}{\sqrt{1-e^2} \sin i_2} \right] \left\langle S \left( \frac{\partial V_2}{\partial i_2} \right) \right\rangle \\ & + \frac{n\sqrt{1-e^2}}{e} \left\langle S \left( \frac{\partial V_2}{\partial e} \right) \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.289g)$$

$$\left\langle \frac{d\Omega_1}{dt} \right\rangle^{\text{CCG}} = 0, \quad (2.289h)$$

$$\left\langle \frac{d\Omega_2}{dt} \right\rangle^{\text{CCG}} = \frac{G m_1 m_2}{a C_2 \dot{\theta}_2} \cot i_2 \left\langle S \left( \frac{\partial V_2}{\partial i_2} \right) \right\rangle + \frac{n}{\sqrt{1-e^2} \sin i_2} \left\langle S \left( \frac{\partial V_2}{\partial i_2} \right) \right\rangle. \quad (2.289i)$$

Debe notarse que la Ec. (2.289c) da la variación en el tiempo de la anomalía media en la época. En virtud de la definición de la anomalía media, dada por la Ec. (2.108), la derivada temporal de la misma puede escribirse como:

$$\frac{dM}{dt} = n + \frac{dM_0}{dt}, \quad (2.290)$$

teniendo en cuenta que ya se han eliminado los términos proporcionales al tiempo. En otras palabras, la Ec. (2.290) simplemente establece que  $M$  varía en el tiempo debido al movimiento mismo del cuerpo celeste en su órbita y también a las perturbaciones que sufre la misma.

Ahora bien, teniendo en cuenta las aproximaciones consideradas en esta sección, los términos del gradiente de  $V_2$  correspondientes a  $(lmpq) = (201q)$  son:

$$S \left( \frac{\partial V_2}{\partial a} \right)_{201q} = -3J_2 \left( \frac{R_2}{a} \right)^2 F_{201}(i_2) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{21q}(e) \cos(q M). \quad (2.291a)$$

$$S \left( \frac{\partial V_2}{\partial e} \right)_{201q} = -J_2 \left( \frac{R_2}{a} \right)^2 F_{201}(i_2) \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{dG_{21q}(e)}{de} \cos(q M). \quad (2.291b)$$

$$S \left( \frac{\partial V_2}{\partial M} \right)_{201q} = J_2 \left( \frac{R_2}{a} \right)^2 F_{201}(i_2) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{21q}(e) q \sin(q M). \quad (2.291c)$$

$$S \left( \frac{\partial V_2}{\partial i_2} \right)_{201q} = -J_2 \left( \frac{R_2}{a} \right)^2 \frac{dF_{201}(i_2)}{di_2} \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{21q}(e) \cos(q M). \quad (2.291d)$$

$$S \left( \frac{\partial V_2}{\partial \omega_2} \right)_{201q} = 0. \quad (2.291e)$$

$$S \left( \frac{\partial V_2}{\partial \Omega_2} \right)_{201q} = 0. \quad (2.291f)$$

Evidentemente, los términos seculares son aquellos para los cuales  $q = 0$ , con lo cual resulta:

$$\left\langle S \left( \frac{\partial V_2}{\partial a} \right) \right\rangle = -3J_2 \left( \frac{R_2}{a} \right)^2 F_{201}(i_2) G_{210}(e), \quad (2.292a)$$

$$\left\langle S \left( \frac{\partial V_2}{\partial e} \right) \right\rangle = -J_2 \left( \frac{R_2}{a} \right)^2 F_{201}(i_2) \frac{dG_{21q}(e)}{de}, \quad (2.292b)$$

$$\left\langle S \left( \frac{\partial V_2}{\partial M} \right) \right\rangle = 0, \quad (2.292c)$$

$$\left\langle S \left( \frac{\partial V_2}{\partial i_2} \right) \right\rangle = -J_2 \left( \frac{R_2}{a} \right)^2 \frac{dF_{201}(i_2)}{di_2} G_{21q}(e). \quad (2.292d)$$

Luego, ahora sí reemplazando estas expresiones en las Ecs. (2.289), se obtiene:

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle^{\text{CCG}} = 0, \quad (2.293a)$$

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle^{\text{CCG}} = 0, \quad (2.293b)$$

$$\left\langle \frac{dM_0}{dt} \right\rangle^{\text{CCG}} = J_2 \left( \frac{R_2}{a} \right)^2 F_{201}(i_2) n \left[ \frac{1-e^2}{e} \frac{dG_{210}(e)}{de} - 6G_{210}(e) \right]. \quad (2.293c)$$

$$\left\langle \frac{di_1}{dt} \right\rangle^{\text{CCG}} = 0, \quad (2.293d)$$

$$\left\langle \frac{di_2}{dt} \right\rangle^{\text{CCG}} = 0, \quad (2.293e)$$

$$\left\langle \frac{d\omega_1}{dt} \right\rangle^{\text{CCG}} = J_2 \left( \frac{R_2}{a} \right)^2 n \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} F_{201}(i_2) \frac{dG_{210}(e)}{de}. \quad (2.293f)$$

$$\left\langle \frac{d\omega_2}{dt} \right\rangle^{\text{CCG}} = J_2 \left( \frac{R_2}{a} \right)^2 \left[ \left( \frac{G m_1 m_2}{a C_2 \dot{\theta}_2} + \frac{n \cos i_2}{\sqrt{1-e^2}} \right) \frac{1}{\sin i_2} \frac{dF_{201}(i_2)}{di_2} G_{210}(e) - \frac{n \sqrt{1-e^2}}{e} F_{201}(i_2) \frac{dG_{210}(e)}{de} \right]. \quad (2.293g)$$

$$\left\langle \frac{d\Omega_1}{dt} \right\rangle^{\text{CCG}} = 0, \quad (2.293h)$$

$$\left\langle \frac{d\Omega_2}{dt} \right\rangle^{\text{CCG}} = J_2 \left( \frac{R_2}{a} \right)^2 \left[ \frac{n}{\sqrt{1-e^2}} - \frac{G m_1 m_2}{a C_2 \dot{\theta}_2} \cos i_2 \right] \times \frac{1}{\sin i_2} \frac{dF_{201}(i_2)}{di_2} G_{210}(e). \quad (2.293i)$$

De esta forma, se han obtenido las ecuaciones que describen la dinámica orbital de un sistema binario, considerando la disipación debida a las mareas y a la influencia del coeficiente  $J_2$  de uno de ellos. Solamente falta sumar las Ecs. (2.274) y (2.293). A continuación, se va a dar una forma aún más conveniente para la implementación de estas fórmulas en un código computacional.

Como se sabe, bajo ciertas condiciones que se van a analizar más adelante, la interacción de mareas puede provocar que tanto la excentricidad como las inclinaciones decrezcan en el tiempo. Ante esta posibilidad, y para evitar singularidades que pueden

comprometer la estabilidad de la integración numérica, se sugiere la introducción de dos variables a fin de eliminar los factores  $e^{-1}$  y  $(\sin i_k)^{-1}$  en las Ecs. (2.263b), (2.263d) y (2.263e). Para esto, se definen las variables  $\xi = \sqrt{1 - e^2}$  y  $x = \cos i$ , con lo cual se tiene:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{e}{\xi} \frac{de}{dt} \quad (2.294)$$

y

$$\frac{dx}{dt} = -\sin i \frac{di}{dt} \quad (2.295)$$

Teniendo en cuenta estas dos últimas expresiones, se obtienen finalmente las ecuaciones que describen la evolución secular de los parámetros orbitales dentro del formalismo construido en este trabajo:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = & -\frac{na}{2} \left( \frac{m_2}{m_1} \left( \frac{R_1}{a} \right)^5 \left[ \left( \frac{3x_1^2 - 1}{2} \right)^2 \sum_{-q_{\max}}^{q_{\max}} G_{21q}^2(e) q K_I^{(1)}(2, \omega_{201q}^{(1)}) \right. \right. \\ & \left. \left. + 3 \left( \frac{1+x_1}{2} \right)^4 \sum_{-q_{\max}}^{q_{\max}} G_{20q}^2(e) (2+q) K_I^{(1)}(2, \omega_{220q}^{(1)}) \right] \right. \\ & \left. + \frac{m_1}{m_2} \left( \frac{R_2}{a} \right)^5 \left[ \left( \frac{3x_2^2 - 1}{2} \right)^2 \sum_{-q_{\max}}^{q_{\max}} G_{21q}^2(e) q K_I^{(2)}(2, \omega_{201q}^{(2)}) \right. \right. \\ & \left. \left. + 3 \left( \frac{1+x_2}{2} \right)^4 \sum_{-q_{\max}}^{q_{\max}} G_{20q}^2(e) (2+q) K_I^{(2)}(2, \omega_{220q}^{(2)}) \right] \right). \quad (2.296a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\xi}{dt} \right\rangle = & \frac{n}{4} \left( \xi \left( \frac{m_2}{m_1} \left( \frac{R_1}{a} \right)^5 \left[ \left( \frac{3x_1^2 - 1}{2} \right)^2 \sum_{-q_{\max}}^{q_{\max}} G_{21q}^2(e) q K_I^{(1)}(2, \omega_{201q}^{(1)}) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + 3 \left( \frac{1+x_1}{2} \right)^4 \sum_{-q_{\max}}^{q_{\max}} G_{20q}^2(e) (2+q) K_I^{(1)}(2, \omega_{220q}^{(1)}) \right] \right. \\ & \left. + \frac{m_1}{m_2} \left( \frac{R_2}{a} \right)^5 \left[ \left( \frac{3x_2^2 - 1}{2} \right)^2 \sum_{-q_{\max}}^{q_{\max}} G_{21q}^2(e) q K_I^{(2)}(2, \omega_{201q}^{(2)}) \right. \right. \\ & \left. \left. + 3 \left( \frac{1+x_2}{2} \right)^4 \sum_{-q_{\max}}^{q_{\max}} G_{20q}^2(e) (2+q) K_I^{(2)}(2, \omega_{220q}^{(2)}) \right] \right) \\ & - \frac{3}{2} \left[ \frac{m_2}{m_1} \left( \frac{R_1}{a} \right)^5 \left( \frac{1+x_1}{2} \right)^4 \sum_{-q_{\max}}^{q_{\max}} G_{20q}^2(e) K_I^{(1)}(2, \omega_{220q}^{(1)}) \right. \\ & \left. \left. + \frac{m_1}{m_2} \left( \frac{R_2}{a} \right)^5 \left( \frac{1+x_2}{2} \right)^4 \sum_{-q_{\max}}^{q_{\max}} G_{20q}^2(e) K_I^{(2)}(2, \omega_{220q}^{(2)}) \right] \right). \quad (2.296b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{dM}{dt} \right\rangle = & n + \frac{3}{2} n \left( \frac{m_2}{m_1} \left( \frac{R_1}{a} \right)^5 \left[ \left( \frac{3x_1^2 - 1}{2} \right)^2 \sum_{-q_{\max}}^{q_{\max}} G_{21q}^2(e) K_R^{(1)} \left( 2, \omega_{201q}^{(1)} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + 3 \left( \frac{1+x_1}{2} \right)^4 \sum_{-q_{\max}}^{q_{\max}} G_{20q}^2(e) K_R^{(1)} \left( 2, \omega_{220q}^{(1)} \right) \right] \right. \\
& \left. + \frac{m_1}{m_2} \left( \frac{R_2}{a} \right)^5 \left[ \left( \frac{3x_2^2 - 1}{2} \right)^2 \sum_{-q_{\max}}^{q_{\max}} G_{21q}^2(e) K_R^{(2)} \left( 2, \omega_{201q}^{(2)} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + 3 \left( \frac{1+x_2}{2} \right)^4 \sum_{-q_{\max}}^{q_{\max}} G_{20q}^2(e) K_R^{(2)} \left( 2, \omega_{220q}^{(2)} \right) \right] \right) \\
& - \frac{n\xi}{4} \left( \frac{m_2}{m_1} \left( \frac{R_1}{a} \right)^5 \left[ \left( \frac{3x_1^2 - 1}{2} \right)^2 \sum_{-q_{\max}}^{q_{\max}} \left( \frac{1}{e} G_{21q}(e) \frac{dG_{21q}(e)}{de} \right) K_R^{(1)} \left( 2, \omega_{201q}^{(1)} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + 3 \left( \frac{1+x_1}{2} \right)^4 \sum_{-q_{\max}}^{q_{\max}} \left( \frac{1}{e} G_{20q}(e) \frac{dG_{20q}(e)}{de} \right) K_R^{(1)} \left( 2, \omega_{220q}^{(1)} \right) \right] \right. \\
& \left. + \frac{m_1}{m_2} \left( \frac{R_2}{a} \right)^5 \left[ \left( \frac{3x_2^2 - 1}{2} \right)^2 \sum_{-q_{\max}}^{q_{\max}} \left( \frac{1}{e} G_{21q}(e) \frac{dG_{21q}(e)}{de} \right) K_R^{(2)} \left( 2, \omega_{201q}^{(2)} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + 3 \left( \frac{1+x_2}{2} \right)^4 \sum_{-q_{\max}}^{q_{\max}} \left( \frac{1}{e} G_{20q}(e) \frac{dG_{20q}(e)}{de} \right) K_R^{(2)} \left( 2, \omega_{220q}^{(2)} \right) \right] \right) \\
& - \frac{3}{2} n J_2 \left( \frac{R_2}{a} \right)^2 \left( \frac{3x_2^2 - 1}{2} \right) \xi^{-3}. \quad (2.296c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{dx_1}{dt} \right\rangle = & \frac{3}{2} \frac{m_2}{m_1} \left( \frac{R_1}{a} \right)^5 \left[ \frac{G m_1 m_2}{a C_1 \dot{\theta}_1} - \frac{n}{\xi} \right] \left( \frac{1+x_1}{2} \right)^4 \\
& \times (1-x_1) \sum_{-q_{\max}}^{q_{\max}} G_{20q}^2(e) K_I^{(1)} \left( 2, \omega_{220q}^{(1)} \right). \quad (2.296d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{dx_2}{dt} \right\rangle = & \frac{3}{2} \frac{m_1}{m_2} \left( \frac{R_2}{a} \right)^5 \left[ \frac{G m_1 m_2}{a C_2 \dot{\theta}_2} - \frac{n}{\xi} \right] \left( \frac{1+x_2}{2} \right)^4 \\
& \times (1-x_2) \sum_{-q_{\max}}^{q_{\max}} G_{20q}^2(e) K_I^{(2)} \left( 2, \omega_{220q}^{(2)} \right). \quad (2.296e)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{d\omega_1}{dt} \right\rangle = & \frac{3}{4} \frac{m_2}{m_1} \left( \frac{R_1}{a} \right)^5 \left[ \frac{G m_1 m_2}{a C_1 \dot{\theta}_1} + \frac{n x_1}{\xi} \right] \left[ x_1 \left( \frac{3x_1^2 - 1}{2} \right) \sum_{-q_{\max}}^{q_{\max}} G_{21q}^2(e) K_R^{(1)} \left( 2, \omega_{201q}^{(1)} \right) \right. \\
& \left. + \left( \frac{1+x_1}{2} \right)^3 \sum_{-q_{\max}}^{q_{\max}} G_{20q}^2(e) K_R^{(1)} \left( 2, \omega_{220q}^{(1)} \right) \right] \\
& + \frac{n \xi}{4} \left( \frac{m_2}{m_1} \left( \frac{R_1}{a} \right)^5 \left[ \left( \frac{3x_1^2 - 1}{2} \right)^2 \sum_{-q_{\max}}^{q_{\max}} \left( \frac{1}{e} G_{21q}(e) \frac{dG_{21q}(e)}{de} \right) K_R^{(1)} \left( 2, \omega_{201q}^{(1)} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + 3 \left( \frac{1+x_1}{2} \right)^4 \sum_{-q_{\max}}^{q_{\max}} \left( \frac{1}{e} G_{20q}(e) \frac{dG_{20q}(e)}{de} \right) K_R^{(1)} \left( 2, \omega_{220q}^{(1)} \right) \right] \right. \\
& + \frac{m_1}{m_2} \left( \frac{R_2}{a} \right)^5 \left[ \left( \frac{3x_2^2 - 1}{2} \right)^2 \sum_{-q_{\max}}^{q_{\max}} \left( \frac{1}{e} G_{21q}(e) \frac{dG_{21q}(e)}{de} \right) K_R^{(2)} \left( 2, \omega_{201q}^{(2)} \right) \right. \\
& \left. + 3 \left( \frac{1+x_2}{2} \right)^4 \sum_{-q_{\max}}^{q_{\max}} \left( \frac{1}{e} G_{20q}(e) \frac{dG_{20q}(e)}{de} \right) K_R^{(2)} \left( 2, \omega_{220q}^{(2)} \right) \right] \Bigg) \\
& + \frac{3}{2} n J_2 \left( \frac{R_2}{a} \right)^2 \frac{3x_2^2 - 1}{2} \xi^{-4}. \quad (2.296f)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{d\omega_2}{dt} \right\rangle = & \frac{3}{4} \frac{m_1}{m_2} \left( \frac{R_2}{a} \right)^5 \left[ \frac{G m_1 m_2}{a C_2 \dot{\theta}_2} + \frac{n x_2}{\xi} \right] \left[ x_2 \left( \frac{3x_2^2 - 1}{2} \right) \sum_{-q_{\max}}^{q_{\max}} G_{21q}^2(e) K_R^{(2)} \left( 2, \omega_{201q}^{(2)} \right) \right. \\
& \left. + \left( \frac{1+x_2}{2} \right)^3 \sum_{-q_{\max}}^{q_{\max}} G_{20q}^2(e) K_R^{(2)} \left( 2, \omega_{220q}^{(2)} \right) \right] \\
& + \frac{n \xi}{4} \left( \frac{m_1}{m_2} \left( \frac{R_2}{a} \right)^5 \left[ \left( \frac{3x_2^2 - 1}{2} \right)^2 \sum_{-q_{\max}}^{q_{\max}} \left( \frac{1}{e} G_{21q}(e) \frac{dG_{21q}(e)}{de} \right) K_R^{(2)} \left( 2, \omega_{201q}^{(2)} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + 3 \left( \frac{1+x_2}{2} \right)^4 \sum_{-q_{\max}}^{q_{\max}} \left( \frac{1}{e} G_{20q}(e) \frac{dG_{20q}(e)}{de} \right) K_R^{(2)} \left( 2, \omega_{220q}^{(2)} \right) \right] \right. \\
& + \frac{m_2}{m_1} \left( \frac{R_1}{a} \right)^5 \left[ \left( \frac{3x_1^2 - 1}{2} \right)^2 \sum_{-q_{\max}}^{q_{\max}} \left( \frac{1}{e} G_{21q}(e) \frac{dG_{21q}(e)}{de} \right) K_R^{(1)} \left( 2, \omega_{201q}^{(1)} \right) \right. \\
& \left. + 3 \left( \frac{1+x_1}{2} \right)^4 \sum_{-q_{\max}}^{q_{\max}} \left( \frac{1}{e} G_{20q}(e) \frac{dG_{20q}(e)}{de} \right) K_R^{(1)} \left( 2, \omega_{220q}^{(1)} \right) \right] \Bigg) \\
& - \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{R_2}{a} \right)^2 \xi^{-4} \left[ \left( \frac{G m_1 m_2}{a C_2 \dot{\theta}_2} + \frac{n x_2}{\xi} \right) x_2 \xi + n \left( \frac{3x_2^2 - 1}{2} \right) \right]. \quad (2.296g)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{d\Omega_1}{dt} \right\rangle = & -\frac{3}{4} \frac{m_2}{m_1} \left( \frac{R_1}{a} \right)^5 \left[ \frac{G m_1 m_2}{a C_1 \dot{\theta}_1} x_1 + \frac{n}{\xi} \right] \left[ x_1 \left( \frac{3x_1^2 - 1}{2} \right) \sum_{-q_{\max}}^{q_{\max}} G_{21q}^2(e) K_R^{(1)} \left( 2, \omega_{201q}^{(1)} \right) \right. \\
& \left. + \left( \frac{1+x_1}{2} \right)^3 \sum_{-q_{\max}}^{q_{\max}} G_{20q}^2(e) K_R^{(1)} \left( 2, \omega_{220q}^{(1)} \right) \right]. \quad (2.296h)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{d\Omega_2}{dt} \right\rangle = & \left[ \frac{G m_1 m_2}{a C_2 \dot{\theta}_2} x_2 + \frac{n}{\xi} \right] \left( -\frac{3 m_1}{4 m_2} \left( \frac{R_2}{a} \right)^5 \right. \\
& \left[ x_2 \left( \frac{3 x_2^2 - 1}{2} \right) \sum_{q=-q_{\max}}^{q_{\max}} G_{21q}^2(e) K_R^{(2)} \left( 2, \chi_{201q}^{(2)} \right) \right. \\
& \left. \left. + \left( \frac{1 + x_2}{2} \right)^3 \sum_{q=-q_{\max}}^{q_{\max}} G_{20q}^2(e) K_R^{(2)} \left( 2, \chi_{220q}^{(2)} \right) \right] + \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{R_2}{a} \right)^2 \frac{x_2}{\xi^3} \right). \quad (2.296i)
\end{aligned}$$

Como puede observarse en las ecuaciones obtenidas, la evolución secular del semieje mayor, la excentricidad, las inclinaciones y de la longitud del nodo ascendente de la órbita vista desde el cuerpo 1 está completamente dominada por la interacción de mareas entre ambos miembros del sistema binario. El resto de los elementos orbitales, en cambio, evoluciona simultáneamente debido a los términos seculares de los potenciales de mareas y aquellos asociados al coeficiente  $J_2$  del cuerpo 2.

También es importante señalar que las ecuaciones obtenidas, que describen la evolución orbital, son totalmente regulares en el límite de bajas (e incluso nulas) excentricidades e inclinaciones, dado que no contienen los factores  $e^{-1}$  ni  $(\sin i_k)^{-1}$ . Puede mostrarse que el primero se cancela debido a que el producto entre las funciones de la inclinación y su derivada no contienen términos de orden  $e^0$ , sino de ordenes  $e^1$  y superiores. En cambio, el segundo se cancela según se puede observar en la Tabla 2.2. Tal como lo señalaron [Brouwer y Clemence \(1961\)](#), “las divergencias presentes en las ecuaciones planetarias de Lagrange son más aparentes que reales”.

La característica mencionada en el párrafo anterior las convierte en candidatas ideales para la construcción de modelos computacionales como el desarrollado en este trabajo. Se debe señalar en este punto que la regularización antes mencionada solamente está pensada para el desarrollo de algoritmos numéricos y que de ninguna manera se pretende decir que se puede eludir el hecho de que el argumento del periastro y la longitud del nodo ascendente son ángulos mal definidos, en el sentido de que carecen de sentido cuando la excentricidad o la inclinación, o ambos, son nulos ([Brouwer y Clemence, 1961](#); [Kopeikin et al., 2011](#)).

En lo que respecta a la evolución rotacional, solamente resta dar las ecuaciones diferenciales para los ángulos de rotación  $\theta_k$ . Tal como se mostró anteriormente, en la Ec. (2.291f), la derivada de  $V_2$  respecto de  $\Omega_2$  —asociada a los términos  $(lmpq) = (201q)$ — es idénticamente nula, por lo que no existen términos seculares ni oscilatorios asociados a  $J_2$  del planeta que tengan influencia en la dinámica rotacional de ninguno de los cuerpos. Ahora bien, los términos que sí tienen influencia son los asociados a  $C_{22}$ . Éstos son los que generan el conocido torque triaxial. La derivada de  $V_2$  respecto de  $\Omega_2$  asociada a los términos  $(lmpq) = (220q)$  está dada por:

$$\begin{aligned}
S \left( \frac{\partial V_2}{\partial \Omega_2} \right)_{220q} = & -\frac{1}{2} \frac{(B - A)}{m_2 a^2} F_{220}(i_2) \\
& \times \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{20q}(e) \sin [2(\omega_2 + \Omega_2 - \theta_2) + (2 + q)M]. \quad (2.297)
\end{aligned}$$

Si se reemplazan las Ecs. (2.260) y (2.261) —teniendo en cuenta en esta última la Ec. (2.297)— en las Ecs. (2.262l) y (2.262m), respectivamente, se obtienen las ecuacio-

nes que describen la evolución rotacional de la estrella y del planeta:

$$\left\langle \frac{d^2\theta_1}{dt^2} \right\rangle = \frac{3}{2} \frac{G m_2^2}{a C_1} \left( \frac{R_1}{a} \right)^5 \left( \frac{1+x_1}{2} \right)^4 \sum_{-q_{\max}}^{q_{\max}} G_{20q}^2(e) K_I^{(1)} \left( 2, \omega_{220q}^{(1)} \right), \quad (2.298a)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = & \frac{3}{2} \frac{G m_1^2}{a C_2} \left( \frac{R_2}{a} \right)^5 \left( \frac{1+x_2}{2} \right)^4 \sum_{-q_{\max}}^{q_{\max}} G_{20q}^2(e) K_I^{(2)} \left( 2, \omega_{220q}^{(2)} \right) \\ & + \frac{3}{2} \frac{G m_1}{a^3} \left( \frac{B-A}{C_2} \right) \left( \frac{1+x_2}{2} \right)^2 \sum_{-q_{\max}}^{q_{\max}} G_{20q}(e) \sin [2(\omega_2 + \Omega_2 - \theta_2) + (2+q)M]. \end{aligned} \quad (2.298b)$$

Cabe mencionar que tanto en las Ecs. (2.296) como en las Ecs. (2.298) las funciones de la inclinación correspondientes a los términos  $(lmpq) = (201q)$  y  $(lmpq) = (220q)$  —dadas en la Tabla 2.2— se han expresado en términos de la variable  $x$  antes definida.

En resumen, las Ecs. (2.296) y las Ecs. (2.298) son las ecuaciones que establecen el formalismo buscado, posibilitando la descripción de la dinámica orbital y rotacional de sistemas binarios en los que se considera la disipación de mareas en ambos cuerpos, y la influencia del coeficiente  $J_2$  en la evolución temporal de los elementos orbitales y de la triaxialidad en la dinámica rotacional de uno de los cuerpos. Por supuesto, la evolución rotacional del otro cuerpo está dominada solamente por la aceleración angular debida a los términos seculares del potencial de mareas correspondiente.

## Capítulo 3

# Deformación de cuerpos celestes y modelos reológicos

El presente capítulo aborda uno de los aspectos fundamentales de la teoría de mareas: la descripción de la respuesta de un cuerpo celeste ante las fuerzas que lo deforman. En el contexto del formalismo desarrollado en el presente trabajo se considera nuevamente un sistema de dos cuerpos, pero solamente se tendrán en cuenta las mareas en uno de ellos (llamado primario), mientras que el otro, denominado secundario, se tratará como una masa puntual; siendo, entonces,  $m_p$  y  $m_s$  las masas del primario y del secundario, respectivamente, y  $R$  el radio del primario.

### 3.1. Mareas dinámicas

En la Sección 2.2.3 se trató el potencial de mareas en términos generales, donde se tuvo en cuenta la posibilidad de que el primario estuviese siendo deformado por  $N$  satélites. La situación, planteada de esta manera, va a permitir un mejor tratamiento de la temática que se pretende abordar en el presente capítulo. Esta situación se ilustra en la Fig. 3.1 en donde resulta llamativa la presencia de dos secundarios; sin embargo, como se verá a continuación, esto va a resultar muy útil para incluir la disipación debida a las mareas en el primario.

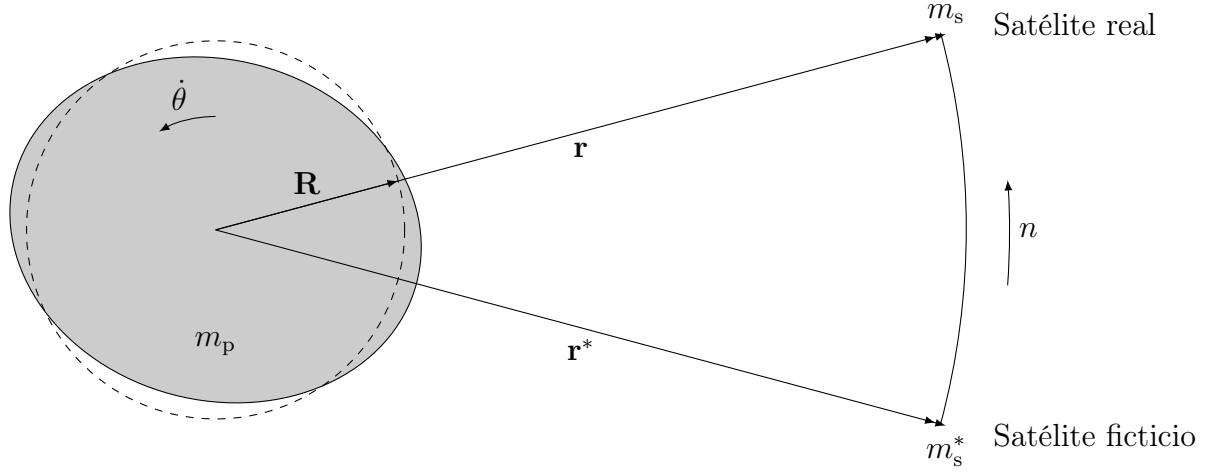
En el punto  $\mathbf{R}$  de la superficie del primario, cuyas coordenadas esféricas son  $(R, \varphi, \lambda)$ , el satélite de masa  $m_s^*$ , que se encuentra en el punto  $\mathbf{r}^*$  respecto del primario, genera el potencial que deforma al último, el cual está dado por la Ec. (2.161), para el caso aquí considerado:

$$W(\mathbf{R}, \mathbf{r}^*) = \sum_{l=2}^{\infty} W_l(\mathbf{R}, \mathbf{r}^*), \quad (3.1)$$

donde

$$W_l(\mathbf{R}, \mathbf{r}^*) = -\frac{Gm_s^*}{a^*} \left(\frac{R}{a^*}\right)^l \sum_{m=0}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) P_{lm}(\sin \varphi) \\ \times \sum_{p=0}^l F_{lmp}(i^*) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{lpq}(e^*) \cos [v_{lmpq}^* - m(\lambda + \theta^*) + \phi_{lm}] \quad (3.2)$$

El gradiente del potencial dado por las Ecs. (3.1) y (3.2) da la fuerza por unidad de masa que deforma al primario. Esta deformación hace que aparezca un término adicional al



**Figura 3.1:** Esquema del razonamiento para obtener la expresión del potencial de mareas considerando el caso de dos cuerpos: el primario (cuya deformación se tiene en cuenta) y el secundario, que se considera como una masa puntual.

potencial gravitatorio del último llamado potencial de mareas, que es justamente el que, por un lado, perturba la órbita del secundario que se encuentra en el punto  $\mathbf{r}$  y, por otro lado, modifica la velocidad de rotación del anterior. Al igual que  $W(\mathbf{R}, \mathbf{r}^*)$ , el potencial de mareas generado por el primario  $U(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*)$  también puede expandirse en términos de los polinomios de Legendre, con lo que su expresión general será:

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*) = \sum_{l=2}^{\infty} U_l(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*) \quad (3.3)$$

En un régimen lineal, dentro del cual se desarrolla el formalismo de la interacción de mareas aquí tratado, cada  $l$ -ésimo término del potencial de mareas del primario es proporcional al  $l$ -ésimo término del potencial dado por las Ecs. (3.1) y (3.2), tal como se indicó en la Sección 2.2.3. Esto es:

$$U_l(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*) = k_l \left( \frac{R}{r} \right)^{l+1} W_l(\mathbf{R}, \mathbf{r}^*), \quad (3.4)$$

donde los  $k_l$  son los números de Love de grado  $l$ , que vendrían a ser las constantes de proporcionalidad. Estos están dados por:

$$k_l^{(\text{est.})} = \frac{3}{2(l-1)} \frac{1}{1 + A_l^{(\text{est.})}} \quad (3.5)$$

donde

$$A_l^{(\text{est.})} = \frac{3(2l^2 + 4l + 3)}{4l\pi G \rho^2 R^2} \mu(\infty) = \frac{3(2l^2 + 4l + 3)}{4l\pi G \rho^2 R^2} \frac{1}{J(\infty)} \quad (3.6)$$

siendo  $G$  la constante de Gravitación Universal,  $\rho$  la densidad media del planeta y  $R$  el radio medio del mismo. Aquí,  $\mu(\infty)$  es el módulo de rigidez estático y su recíproco,  $J(\infty)$ , es el módulo de flexibilidad estático. Éstos se denominan estáticos porque corresponden a los valores relajados de dichas cantidades, esto es, los que adquieren luego del periodo de reptación. Puede verse en la Ec. (3.6) que  $A_l$  es una medida adimensional que permite dar una idea de si el comportamiento reológico está dominado por la rigidez del material que compone al primario o por su autogravitación.

Al igual que en la Sección 2.2.3, la Ec. (3.2) puede insertarse en la Ec. (3.4) y ésta, a su vez en la Ec. (3.3), para luego aplicar nuevamente la transformación de Kaula, dada por la Ec. (2.160), y obtener una expresión análoga a la Ec. (2.166). De esta forma, se obtendría la expresión del potencial de mareas correspondiente a la respuesta instantánea de la deformación del primario:

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*) = -\frac{Gm^*}{a^*} \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{R}{a}\right)^{l+1} \left(\frac{R}{a^*}\right)^l \sum_{m=0}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) \\ \times \sum_{p=0}^l F_{lmp}(i^*) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{lpq}(e^*) \sum_{h=0}^l F_{lmh}(i) \sum_{s=-\infty}^{\infty} G_{lhs}(e) \\ \times k_l \cos [(v_{lmpq}^* - m\theta^*) - (v_{lmhs} - m\theta)] \quad (3.7)$$

Luego, el razonamiento que se sigue para incluir la disipación, tal como se hizo en la sección antes citada, es considerar que en el instante  $t$  el secundario en la posición  $\mathbf{r}$  sufre la perturbación debido a la marea producida por el secundario en la posición  $\mathbf{r}^*$  un instante anterior  $t - \Delta t$ .  $\Delta t$  está relacionado con el tiempo de reptación del material, esto es, el intervalo de tiempo que el primario tarda en alcanzar la configuración de equilibrio en el nuevo estado de tensiones definido por  $W(\mathbf{R}, \mathbf{r}^*)$ . Por lo tanto, existe un desfase entre la excitación dada por el potencial antes mencionado y el de mareas, que caracteriza la respuesta en deformación. Dicho desfase fue definido en la Ec. (2.173). Este desfase se incluye entonces en la Ec. (3.7) y se obtiene:

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*) = -\frac{Gm^*}{a^*} \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{R}{a}\right)^{l+1} \left(\frac{R}{a^*}\right)^l \sum_{m=0}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) \\ \times \sum_{p=0}^l F_{lmp}(i^*) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{lpq}(e^*) \sum_{h=0}^l F_{lmh}(i) \sum_{s=-\infty}^{\infty} G_{lhs}(e) \\ \times k_l \cos [(v_{lmpq}^* - m\theta^*) - (v_{lmhs} - m\theta) - \epsilon_{lmpq}], \quad (3.8)$$

la cual puede reescribirse como:

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*) = -\frac{Gm^*}{a^*} \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{R}{a}\right)^{l+1} \left(\frac{R}{a^*}\right)^l \sum_{m=0}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) \\ \times \sum_{p=0}^l F_{lmp}(i^*) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{lpq}(e^*) \sum_{h=0}^l F_{lmh}(i) \sum_{s=-\infty}^{\infty} G_{lhs}(e) \\ \times [\cos [(v_{lmpq}^* - m\theta^*) - (v_{lmhs} - m\theta)] k_l \cos \epsilon_{lmpq} \\ + \sin [(v_{lmpq}^* - m\theta^*) - (v_{lmhs} - m\theta)] k_l \sin \epsilon_{lmpq}] \quad (3.9)$$

Ahora bien, el potencial perturbador producido por el secundario tiene un espectro de frecuencias  $\omega_{lmpq}$  (positivas y negativas), el cual genera un espectro de deformaciones cuyas frecuencias correspondientes son  $\chi_{lmpq} = |\omega_{lmpq}|$ . Si bien en un medio lineal las deformaciones se generan exactamente en las frecuencias de los esfuerzos, la fricción hace que cada componente de Fourier de las anteriores se retrase respecto de las correspondientes componentes de las últimas. Este es el origen de los  $\epsilon_{lmpq}$ , los cuales, por supuesto, no tienen por qué ser todos iguales. Esto equivale a decir que la respuesta

de la deformación para una frecuencia determinada de la excitación es distinta a las demás. Esto implica que los  $\epsilon_{lmpq}$  deben ser función de dicha frecuencia. La fricción también reduce la magnitud de la respuesta en la forma y, por lo tanto, los números de Love también han de depender de las frecuencias correspondientes. Es por este motivo que a los  $k_l(\chi)$  se los conoce como números de Love *dinámicos* para distinguirlos de su contraparte estática,  $k_l = k_l(0)$ , los cuales fueron definidos en la Ec. (3.5).

La dependencia en la frecuencia del número de Love dinámico tiene su origen en la “inercia” de la deformación y, por lo tanto, en la forma del cuerpo. Podemos hacer una analogía con los circuitos lineales: el término  $l$ -ésimo de  $W(\mathbf{R}, \mathbf{r}^*)$  y de  $U(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*)$  actúan como la corriente y el voltaje, respectivamente, mientras que el número de Love  $l$ -ésimo, excepto por un factor, juega el rol de la impedancia.

Surge ahora la pregunta de cómo obtener la forma funcional de los números de Love dinámicos. La clave para contestar esa pregunta reside en el hecho de que en la Ec. (3.9) éstos aparecen en la forma  $k_l(\chi) \cos \epsilon_{lmpq}(\chi)$  y  $k_l(\chi) \sin \epsilon_{lmpq}(\chi)$ , los cuales pueden pensarse como las partes real e imaginaria de un número de Love complejo:

$$\bar{k}_l(\chi) = |\bar{k}_l(\chi)| \exp[-i \epsilon_l(\chi)] \quad (3.10)$$

El signo menos en la Ec. (3.10) hace que  $U(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*)$  quede retrasado respecto de  $W(\mathbf{R}, \mathbf{r}^*)$  cuando  $\epsilon_l$  es positivo. Esto es análogo a un circuito con un capacitor, en el cual el voltaje va atrasado respecto de la corriente.

En el límite de frecuencia cero —esto es, para una deformación estacionaria— el desfase desaparece y lo mismo ocurre con la parte imaginaria de  $\bar{k}_l$ :

$$\text{Im} [\bar{k}_l(0)] = |\bar{k}_l(0)| \sin \epsilon_l(0) = 0 \quad (3.11)$$

con lo cual, sólo queda la parte real del número de Love complejo:

$$\bar{k}_l(0) = \text{Re} [\bar{k}_l(0)] = |\bar{k}_l(0)| \cos \epsilon_l(0) \quad (3.12)$$

que, además, es igual al número de Love estático:

$$\bar{k}_l(0) = k_l \quad (3.13)$$

Es importante señalar en este punto que la hipótesis de linealidad implica también que la disipación a una determinada frecuencia depende solamente de esa frecuencia. Esto, naturalmente, es una suposición, ya que es posible que dependa de otras frecuencias, siendo éste, actualmente, un tema de investigación (Efroimsky, 2012).

## 3.2. Números de Love complejos

La definición formal de los números de Love complejos viene de la mano del hecho de que tanto el potencial perturbador  $W(\mathbf{R}, \mathbf{r}^*)$  como el potencial de mareas  $U(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*)$  dependen del tiempo en virtud de que los cuerpos están en movimiento, esto es:

$$U_l(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \hat{k}_l(t) W_l(\mathbf{R}, \mathbf{r}^*, t') \quad (3.14)$$

donde, ahora, los números de Love se convierten en los operadores de Love  $\hat{k}_l(t)$ , los cuales son operadores integrales lineales:

$$\begin{aligned} V_l(\mathbf{r}, t) &= \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \int_{t'=-\infty}^{t'=t} k_l(t-t') \dot{W}_l(\mathbf{R}, \mathbf{r}', t') dt' \\ &= \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} [k_l(0)W(t) - k_l(-\infty)W(-\infty)] \\ &\quad + \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \int_{-\infty}^t \dot{k}_l(t-t') W_l(\mathbf{R}, \mathbf{r}', t') dt' \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde la segunda igualdad se obtiene integrando por partes. Puede notarse la presencia de dos términos de contorno: el primero,  $k_l(0)W(t)$ , que corresponde a una reacción instantánea mientras que el segundo,  $-k_l(-\infty)W(-\infty)$ , corresponde a la perturbación en un instante de tiempo infinitamente alejado del presente. El último puede desprejarse fijando  $W(-\infty) = 0$ , mientras que el primero puede incluirse en el núcleo de la integral definiendo la función  $k_l(t-t')$  como:

$$\begin{aligned} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} k_l(0)W(t) + \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \int_{-\infty}^t \dot{k}_l(t-t') W_l(\mathbf{R}, \mathbf{r}', t') dt' = \\ \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \int_{-\infty}^t \frac{d}{dt} [k_l(t-t') - k_l(0) + k_l(0) \Theta(t-t')] W_l(\mathbf{R}, \mathbf{r}', t') dt' \end{aligned} \quad (3.16)$$

Con lo cual, en definitiva, se obtiene:

$$V_l(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \int_{-\infty}^t \dot{k}_l(t-t') W_l(\mathbf{R}, \mathbf{r}', t') dt' \quad (3.17)$$

donde, ahora, la función  $k_l(t-t')$  incorpora la reacción elástica correspondiente al término  $k_l(0)\Theta(t-t')$ . Si el planeta estuviese compuesto por un material perfectamente elástico, dicho término sería el único presente en la expresión de la función  $k_l(t-t')$ . En consecuencia, su derivada respecto al tiempo sería  $\dot{k}_l(t-t') = k_l\delta(t-t')$ , siendo  $k_l \equiv k_l(0)$  el número de Love estático y la Ec. (3.17) se reduciría a la expresión

$$V_l(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} k_l W_l(\mathbf{R}, \mathbf{r}', t')$$

que es equivalente al caso estático.

Así, los números de Love complejos pueden definirse como:

$$\bar{k}_l(\chi) = \int_0^\infty \dot{k}_l(\tau) e^{-i\chi\tau} d\tau \quad (3.18)$$

donde el punto indica la derivación respecto de  $\tau = t - t'$ . Aquí, las funciones  $\dot{k}_l(\tau)$  se denominan las funciones de Love. Es suficiente que la integración cubra el semi-intervalo  $[0; \infty)$ , esto es, desde  $t' = t$  (el presente) hasta  $t' \rightarrow -\infty$  (infinitamente atrás en el tiempo) dado que las perturbaciones futuras no contribuyen al estado actual del sistema (Efroimsky, 2012).

En virtud de la definición de los números de Love complejos, se puede reescribir la Ec. (3.17) en el dominio de la frecuencia, aplicando la transformada de Fourier a ambos lados de la citada ecuación; el resultado es:

$$\bar{U}_l(\chi) = \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \bar{k}_l(\chi) \bar{W}_l(\chi) \quad (3.19)$$

donde  $\chi$  es la frecuencia, mientras que  $\bar{U}_l(\chi)$  y  $\bar{W}_l(\chi)$  son las transformadas de Fourier del potencial adicional del planeta  $V_l(\mathbf{r}, t)$ , debido a su deformación, y del potencial perturbador  $W_l(\mathbf{R}, \mathbf{r}', t')$ , respectivamente.

La forma funcional de  $\bar{k}_l(\chi)$  se obtiene a partir de un importante teorema conocido como *principio de correspondencia* o *analogía elástica-viscoelástica* (Darwin, 1879; Biot, 1954), que constituye otro de los pilares fundamentales del formalismo de Darwin-Kaula de la Teoría de Mareas. Este teorema establece que si se conocen las soluciones del problema elástico, entonces las transformadas de las soluciones (sean las transformadas de Fourier o de Laplace) correspondientes al problema viscoelástico se pueden obtener reemplazando las constantes elásticas por sus operadores correspondientes y los esfuerzos por sus respectivas transformadas (Marques y Creus, 2012). Un corolario útil a los fines que perseguimos es que, en función de la frecuencia, los números de Love complejos se expresan mediante la rigidez y la flexibilidad complejas de la misma manera que se expresan los números de Love estáticos en función de los módulos de rigidez y de flexibilidad (Efroimsky, 2012). En este trabajo asumimos —tal como se hace en la literatura especializada— que este teorema se aplica en todos los casos que vamos a estudiar. Por ahora, la discusión sobre los límites de validez del mismo escapa a los alcances de esta tesis, pero se pueden encontrar discusiones interesantes en los trabajos de Efroimsky (2012, 2015)

En virtud del principio antes mencionado, los números Love complejos tienen la misma dependencia funcional de  $\rho$ ,  $R$  y  $\mu$  que su contraparte estática dada por la Ec. (3.5), la única diferencia es, por supuesto, que en lugar de la rigidez o la flexibilidad habituales se deben usar sus contrapartes complejas:

$$\bar{k}_l(\chi) = \frac{3}{2(l-1)} \frac{1}{1 + A_l \bar{\mu}(\chi)/\mu} \quad (3.20a)$$

$$= \frac{3}{2(l-1)} \frac{1}{1 + A_l J/\bar{J}(\chi)} = \frac{3}{2(l-1)} \frac{\bar{J}(\chi)}{\bar{J}(\chi) + A_l J} \quad (3.20b)$$

donde,

$$A_l = \frac{3(2l^2 + 4l + 3)}{4l\pi G \rho^2 R^2} \mu = \frac{3(2l^2 + 4l + 3)}{4l\pi G \rho^2 R^2} \frac{1}{J} \quad (3.21)$$

Si bien la expresión para  $A_l$ , dada por la Ec. (3.21), es similar a la correspondiente expresión para su contraparte estática, dada por la Ec. (3.5), se debe tener presente que en la última aparecen los valores estáticos (relajados) de la rigidez y la flexibilidad,  $\mu(\infty)$  y  $J(\infty) = 1/\mu(\infty)$ , mientras que en la primera los símbolos  $\mu$  y  $J$  pueden corresponder a cualesquiera valores de referencia de las respectivas cantidades tales que satisfagan  $\mu = 1/J$ . El origen de esta libertad yace en el hecho de que el término  $A_l J$  de la Ec. (3.20) no depende de  $J$  ni de  $\mu$ . El segundo término en el denominador de la Ec. (3.20a) contiene  $\bar{\mu}$ . Por conveniencia, se multiplica y luego se divide  $\bar{\mu}$  por algún valor particular de  $\mu$ , haciendo que el multiplicador  $\mu$  sea parte de  $A_l$ , tal como en la Ec. (3.21). De esta forma, resulta más sencillo comparar la Ec. (3.21) con su predecesora, la Ec. (3.6). Sin embargo, la constante  $\mu$  en dichas ecuaciones es esencialmente



arbitraria y, por lo tanto, no necesariamente coincide con, por ejemplo, el valor estático, o relajado, de la rigidez. Análogamente,  $J = 1/\mu$  no necesariamente coincide con el valor estático de la flexibilidad.

Para cerrar esta sección, dada la forma funcional de los números de Love complejos por la Ec. (3.20), se pueden obtener ahora sus partes real e imaginaria, teniendo en cuenta que:

$$K_R(l, \omega) = k_l(\chi) \cos \epsilon_l(\chi) = \text{Re} [\bar{k}_l(\chi)] \quad (3.22a)$$

$$K_I(l, \omega) = k_l(\chi) \sin \epsilon_l(\chi) \text{sgn}(\omega) = -\text{Im} [\bar{k}_l(\chi)] \quad (3.22b)$$

donde  $K_R(l, \omega)$  y  $K_I(l, \omega)$  se conocen como funciones de calidad (Makarov, 2012). Luego, las expresiones de los factores dados en las Ecs. (3.22) son:

$$K_R(l, \omega) = \frac{3}{2(l-1)} \frac{(\text{Re} [\bar{J}(\chi)] + A_l J) \text{Re} [\bar{J}(\chi)] + (\text{Im} [\bar{J}(\chi)])^2}{(\text{Re} [\bar{J}(\chi)] + A_l J)^2 + (\text{Im} [\bar{J}(\chi)])^2} \quad (3.23a)$$

$$K_I(l, \omega) = -\frac{3}{2(l-1)} \frac{A_l J \text{Im} [\bar{J}(\chi)]}{(\text{Re} [\bar{J}(\chi)] + A_l J)^2 + (\text{Im} [\bar{J}(\chi)])^2} \text{sgn}(\omega_{lmpq}) \quad (3.23b)$$

Si bien se ha contestado la pregunta acerca de la forma funcional de los números de Love complejos, queda ahora responder la siguiente pregunta: ¿Cuál es la forma funcional de  $\bar{J}(\chi)$ ? La respuesta a este último interrogante es el motivo de la próxima sección.

### 3.3. Descripción matemática de la deformación de cuerpos celestes

Los sólidos en general se deforman bajo la acción de fuerzas aplicadas, es decir, cambian de forma y volumen. Se puede describir matemáticamente esta deformación mediante el conocido tensor de deformaciones:

$$\mathbb{U} = \frac{1}{2} [(\nabla \otimes \mathbf{u}) + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T] \quad (3.24)$$

donde  $\mathbf{u}$  es el vector de desplazamiento. La relación entre el tensor de deformaciones y el de tensiones se conoce como *ecuación constitutiva*. En términos matemáticos se expresa como:

$$\mathbb{S} = \mathbb{C}\mathbb{U} \quad (3.25)$$

donde  $\mathbb{C}$  es un tensor que contiene los parámetros que describen la respuesta de un material a las tensiones aplicadas, como los módulos elásticos, la viscosidad, etc.

Cuando se escribió la relación entre el potencial generado por el planeta deformado y el potencial debido a la presencia del secundario, esto es, cómo el primero se corrige debido al segundo, se dijo que dicha relación es válida dentro de la suposición de linealidad. Esta hipótesis se extiende hasta las ecuaciones constitutivas. Es decir, como se van a considerar solamente deformaciones lineales, las ecuaciones constitutivas también van a ser lineales.

El esfuerzo elástico  $\overset{(e)}{\mathbb{S}}$  está relacionado con  $\mathbb{U}$  simplemente a través de la expresión:

$$\overset{(e)}{\mathbb{S}} = \mathbb{B}\mathbb{U} \quad (3.26)$$

donde  $\mathbb{B}$  es una matriz cuadridimensional de números reales llamados *módulos elásticos*. Esta última relación es totalmente análoga a la ley de Hooke.

Por supuesto, también es posible tener otros tipos de esfuerzo. En este trabajo se van a considerar los esfuerzos *hereditarios*, es decir que en el material pueden quedar tensiones residuales una vez retirado el esfuerzo, las cuales a su vez puede ser reversibles (anelasticidad) o irreversibles (inelasticidad). La relación entre el esfuerzo hereditario y la deformación puede escribirse también de forma lineal:

$$\overset{(h)}{\mathbb{S}} = \tilde{\mathbb{B}} \mathbb{U} \quad (3.27)$$

donde  $\tilde{\mathbb{B}}$  es una matriz cuadridimensional cuyas componentes actúan sobre los elementos  $u_{kl}$  de la deformación, no como meros multiplicadores sino como operadores integrales, en los que la integración va desde  $t' = -\infty$  hasta  $t' = t$ . Entonces, para calcular el valor de  $\sigma_{ij} = \sum_{kl} \tilde{B}_{ijkl} u_{kl}$  en el instante  $t$ , el operador toma como argumento todos los valores de  $u_{kl}(t')$  en el intervalo  $(-\infty, t)$ , esto es:  $t' \in (-\infty, t)$ .

Por último, el otro tipo de esfuerzos que se va a considerar es el *viscoso*. Éste está relacionado con la deformación a través del operador diferencial  $\mathbb{A} \frac{\partial}{\partial t}$ ,

$$\overset{(v)}{\mathbb{S}} = \mathbb{A} \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{U} \quad (3.28)$$

donde la matriz cuadridimensional  $\mathbb{A}$  tiene como elementos constantes empíricas llamadas *viscosidades*.

En un medio isotrópico, cada una de las tres matrices  $\mathbb{B}$ ,  $\tilde{\mathbb{B}}$  y  $\mathbb{A}$  tienen solamente dos términos. Entonces, el esfuerzo elástico se puede escribir:

$$\overset{(e)}{\mathbb{S}} = \overset{(e)}{\mathbb{S}}_{\text{vol}} + \overset{(e)}{\mathbb{S}}_{\text{corte}} = 3K \left( \frac{1}{3} \mathbb{I} \text{Tr } \mathbb{U} \right) + 2\mu \left( \mathbb{U} - \frac{1}{3} \mathbb{I} \text{Tr } \mathbb{U} \right) \quad (3.29)$$

donde  $K$  y  $\mu$  son el módulo de compresibilidad y el módulo de rigidez, respectivamente,  $\mathbb{I}$  es la matriz identidad y  $\text{Tr}$  es la traza de matriz,  $\text{Tr } \mathbb{U} = \sum_i U_{ii}$ .

El esfuerzo hereditario se puede expresar como:

$$\overset{(h)}{\mathbb{S}} = \overset{(h)}{\mathbb{S}}_{\text{vol}} + \overset{(h)}{\mathbb{S}}_{\text{corte}} = 3\bar{K} \left( \frac{1}{3} \mathbb{I} \text{Tr } \mathbb{U} \right) + 2\bar{\mu} \left( \mathbb{U} - \frac{1}{3} \mathbb{I} \text{Tr } \mathbb{U} \right) \quad (3.30)$$

donde ahora  $\bar{K}$  y  $\bar{\mu}$  son los operadores de compresibilidad y de rigidez, respectivamente.

Por último, el esfuerzo viscoso se escribe en forma análoga a los anteriores:

$$\overset{(v)}{\mathbb{S}} = \overset{(v)}{\mathbb{S}}_{\text{vol}} + \overset{(v)}{\mathbb{S}}_{\text{corte}} = 3\zeta \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{3} \mathbb{I} \text{Tr } \mathbb{U} \right) + 2\eta \frac{\partial}{\partial t} \left( \mathbb{U} - \frac{1}{3} \mathbb{I} \text{Tr } \mathbb{U} \right) \quad (3.31)$$

donde las cantidades  $\zeta$  y  $\eta$  son las viscosidades de volumen y de corte, respectivamente.

El término  $\frac{1}{3} \mathbb{I} \text{Tr } \mathbb{U}$  se conoce como deformación *volumétrica*, mientras que  $\mathbb{U} - \frac{1}{3} \mathbb{I} \text{Tr } \mathbb{U}$  se denomina deformación de *corte*. Tal como se puede ver, el término volumétrico corresponde a una deformación en la cual solo cambia el volumen del cuerpo, quedando su forma inalterada. En cambio, el término de corte se asocia a una deformación en la que cambia la forma del cuerpo, mientras que su volumen permanece constante.

En este trabajo se asumirá que los planetas están conformados por materiales *viscoelásticos* que, además, tienen la propiedad de exhibir una reacción hereditaria anelástica. También se supone que son incompresibles, esto es, sólo cambian de forma, no

de volumen, por lo tanto  $\text{Tr } \mathbb{U} = 0$ . En otras palabras, solamente se van a tener en cuenta los esfuerzos y deformaciones de corte. De esta manera se logra una descripción suficientemente general del comportamiento de los planetas ante las fuerzas que los deforman.

De la misma forma que el potencial perturbador y el de mareas cambian en el tiempo, también lo hacen las fuerzas y las deformaciones. Es por esto que es necesario tratar con tensores de tensiones y de deformaciones dependientes del tiempo. Sin embargo, el tratamiento de la viscoelasticidad es más sencillo si todas las cantidades se escriben en función de la frecuencia. Para esto, el esfuerzo  $\sigma_{\gamma\nu}$  y la deformación  $u_{\gamma\nu}$  en un medio lineal se pueden expandir en series de Fourier:

$$\begin{aligned}\sigma_{\gamma\nu}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{\gamma\nu}(\chi_n) \cos[\chi_n t + \varphi_{\sigma}(\chi_n)] = \sum_{n=0}^{\infty} \text{Re} [\sigma_{\gamma\nu}(\chi_n) e^{i\chi_n t + i\varphi_{\sigma}(\chi_n)}] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \text{Re} [\bar{\sigma}_{\gamma\nu}(\chi_n) e^{i\chi_n t}] \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned}u_{\gamma\nu}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_{\gamma\nu}(\chi_n) \cos[\chi_n t + \varphi_u(\chi_n)] = \sum_{n=0}^{\infty} \text{Re} [u_{\gamma\nu}(\chi_n) e^{i\chi_n t + i\varphi_u(\chi_n)}] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \text{Re} [\bar{u}_{\gamma\nu}(\chi_n) e^{i\chi_n t}], \end{aligned} \quad (3.33)$$

donde

$$\bar{\sigma}_{\gamma\nu}(\chi) = \sigma_{\gamma\nu}(\chi) e^{i\varphi_{\sigma}(\chi)} \quad , \quad \bar{u}_{\gamma\nu}(\chi) = u_{\gamma\nu}(\chi) e^{i\varphi_u(\chi)} \quad (3.34)$$

Las fases iniciales  $\varphi_{\sigma}(\chi)$  y  $\varphi_u(\chi)$  se eligen de manera que las amplitudes (reales)  $\sigma_{\gamma\nu}(\chi_n)$  y  $u_{\gamma\nu}(\chi_n)$  sean positivas.

Los desarrollos en series de Fourier anteriores se escribieron para un conjunto discreto de frecuencias, por supuesto los mismos pueden escribirse para un conjunto continuo:

$$\sigma_{\gamma\nu}(t) = \int_0^{\infty} \bar{\sigma}_{\gamma\nu}(\chi) e^{i\chi t} d\chi \quad \text{y} \quad u_{\gamma\nu}(t) = \int_0^{\infty} \bar{u}_{\gamma\nu}(\chi) e^{i\chi t} d\chi \quad (3.35)$$

Considérense nuevamente las ecuaciones constitutivas, es decir, la relación entre el esfuerzo y la deformación. Para el caso que nos interesa, dichas relaciones se escriben:

$$2 u_{\gamma\nu}(t) = \hat{J}(t) \sigma_{\gamma\nu} \quad (3.36)$$

y

$$\sigma_{\gamma\nu}(t) = 2 \hat{\mu}(t) u_{\gamma\nu}, \quad (3.37)$$

donde  $\hat{J}(t)$  y  $\hat{\mu}(t)$  son operadores denominados *operador flexibilidad* y *operador rigidez*, respectivamente. Puede demostrarse que estos operadores satisfacen la relación:

$$\hat{J}(t) \hat{\mu}(t) = \hat{\mathbb{I}}, \quad (3.38)$$

donde  $\hat{\mathbb{I}}$  es el operador identidad.

El operador  $\hat{J}(t)$  es un operador integral que se puede escribir como:

$$\hat{J}(t) \sigma_{\gamma\nu} = \int_{-\infty}^t J(t-t') \dot{\sigma}_{\gamma\nu}(t') dt',$$

donde  $J(t - t')$  se conoce como la *función de flexibilidad* (Efroimsky, 2012). Reemplazando esta expresión en (3.36) e integrando por partes se obtiene:

$$2u_{\gamma\nu}(t) = J(0)\sigma_{\gamma\nu}(t) - J(\infty)\sigma_{\gamma\nu}(-\infty) + \int_{-\infty}^t \dot{J}(t - t') \sigma_{\gamma\nu}(t') dt' \quad (3.39)$$

La cantidad  $J(\infty)$  es el valor de  $J(t - t')$  cuando  $t - t' \rightarrow \infty$ , que corresponde a la deformación después de la completa relajación del material. El esfuerzo en el pasado lejano puede suponerse igual a cero y, por lo tanto, el término  $-J(\infty)\sigma_{\gamma\nu}(-\infty)$  puede despreciarse.

El otro valor importante es el de  $J(0)$ , esto es, el valor de la flexibilidad para el instante  $t = t'$ . Este parámetro describe la respuesta instantánea al esfuerzo aplicado, y por lo tanto define la parte elástica de la deformación, los demás términos describen las partes viscosa y hereditaria de la misma. Es por esto que el término que contiene  $J(0)$  debe permanecer en la expresión. Dicho término puede incluirse dentro de la integral si la función de flexibilidad se escribe de la siguiente manera:

$$J(t - t') = J(0)\Theta(t - t') + \text{términos viscoso y hereditario} \quad (3.40)$$

donde  $\Theta(t - t')$  es la función de Heaviside, que vale uno para  $t - t' \geq 0$  y cero para  $t - t' < 0$ , y cuya derivada es la función delta de Dirac,  $\delta(t - t')$ . Entonces, en virtud de esto, la ecuación constitutiva (3.39) se puede escribir:

$$2u_{\gamma\nu}(t) = \hat{J}(t) \sigma_{\gamma\nu} = \int_{-\infty}^t \dot{J}(t - t') \sigma_{\gamma\nu}(t') dt' \quad (3.41)$$

Por otro lado, a diferencia de  $\hat{J}$ , el operador  $\hat{\mu}$  es en general un operador integro-diferencial (Efroimsky, 2012). Por este motivo, la ecuación constitutiva (3.37) suele escribirse como:

$$\sigma_{\gamma\nu}(t) = 2 \int_{-\infty}^t \mu(t - t') \dot{u}_{\gamma\nu}(t') dt' \quad (3.42)$$

Si se permite que el núcleo  $\mu(t - t')$  contenga el término  $\eta\delta(t - t')$ , después de la integración el mismo va a dar la parte viscosa del esfuerzo, esto es  $2\eta\dot{u}_{\gamma\nu}$ . Análogamente al caso anterior, la parte independiente del tiempo de  $\mu(t - t')$  es  $\mu(0)\Theta(t - t')$ , donde  $\mu(0)$  es la inversa de  $J(0)$  y corresponde también a la parte elástica de la deformación. Los demás términos en  $\mu(t - t')$  que no son constantes ni contienen la delta de Dirac son responsables de la reacción hereditaria.

Por supuesto, tal como se hizo con el esfuerzo y la deformación, también la flexibilidad y la rigidez se pueden expandir en series de Fourier. Para esto se introduce la flexibilidad compleja  $\bar{J}(\chi)$  y la rigidez compleja  $\bar{\mu}(\chi)$ , que se definen como las transformadas de Fourier de las derivadas temporales de las correspondientes funciones  $J(\tau)$  y  $\mu(\tau)$ , siendo  $\tau = t - t'$ :

$$\bar{J}(\chi) = \int_0^{\infty} \dot{J}(\tau) e^{-i\chi\tau} d\tau \quad (3.43)$$

y

$$\bar{\mu}(\chi) = \int_0^{\infty} \dot{\mu}(\tau) e^{-i\chi\tau} d\tau \quad (3.44)$$

El intervalo de integración en ambas formulas es  $[0, \infty)$  dado que, de todas formas, ambos núcleos son nulos para  $\tau < 0$ . Según Efroimsky (2012), es fácil ver que:

$$\bar{J}(\chi) \bar{\mu}(\chi) = 1 \quad (3.45)$$

Así, una vez que se eligió la reología adecuada para describir la respuesta del material que conforma el cuerpo celeste a estudiar, lo cual equivale a elegir una forma particular de la Ec. (3.40), esta última se debe derivar y luego introducir en la Ec. (3.43) para luego obtener la forma funcional buscada de  $\bar{J}(\chi)$ . Puede apreciarse en este punto una de las fortalezas del formalismo de Darwin-Kaula. Si bien se mencionaron distintos tipos de comportamientos de los materiales que componen los cuerpos celestes, como el comportamiento elástico o el viscoso, entre otros, se debe tener siempre presente que dicho comportamiento puede estar descrito por cualquier tipo de reología lineal, es decir, que las funciones  $\bar{J}(\chi)$  o  $\bar{\mu}(\chi)$  se obtengan a partir de una ecuación constitutiva lineal.

### 3.4. Modelos reológicos

A lo largo de la historia del desarrollo de la Teoría de Mareas se han propuesto diversos modelos reológicos que se van a exponer en esta sección por razones de completitud. Los dos primeros de ellos, por ser los primeros también en el orden cronológico, son también los más sencillos. Se trata de los modelos de desfase angular constante (o CPL, por sus siglas en inglés), también conocido modelo de  $Q$  constante, y modelo de desfase temporal (o CTL, por sus siglas en inglés). Aquí simplemente se los va a presentar, pero se van a tratar con más detalle en la Subsección 4.2.2. Considérese nuevamente la definición de los desfases  $\epsilon_{lmpq}$  dados por la Ec. (2.173), esto es:

$$\epsilon_{lmpq}(\omega_{lmpq}) = \chi_{lmpq} \operatorname{sgn}(\omega_{lmpq}) \Delta t_{lmpq}. \quad (3.46)$$

En esta última expresión se pone de manifiesto la dependencia de los desfases con respecto a las frecuencias  $\chi_{lmpq}$  o, más precisamente, con respecto a los modos de Fourier sobre los cuales se expande el potencial de mareas,  $\omega_{lmpq}$ . Los modelos reológicos antes mencionados se desarrollaron durante las investigaciones acerca de la evolución rotacional debida al torque de mareas. Tal como puede verse, por ejemplo en la Ec. (2.298a), el mismo depende de la parte imaginaria del número de Love complejo, es decir, de:

$$K_l(l, \omega_{lmpq}) = k_l(\omega_{lmpq}) \operatorname{sen} \epsilon_l(\omega_{lmpq}) \quad (3.47)$$

El modelo CPL propone simplemente que tanto los números de Love como los desfases angulares son constantes —siendo los últimos, además, iguales entre sí— (MacDonald, 1964; Kaula, 1964), con lo cual se tiene simplemente que

$$k_l(\omega_{lmpq}) \operatorname{sen} \epsilon_l(\omega_{lmpq}) = \frac{k_l}{Q},$$

donde  $Q$  se conoce como factor de calidad. El último es una medida de la energía máxima disipada en cada ciclo en relación a la energía total disipada en el mismo ciclo (Efroimsky y Williams, 2009). Este concepto surge de la analogía existente entre el problema de la desaceleración angular causada por el ya mencionado torque de mareas con el péndulo simple forzado y amortiguado (Goldreich y Peale, 1966; Murray y Dermott, 1999).

El modelo CTL, en cambio, propone la constancia tanto de los desfases temporales  $\Delta t_{lmpq}$  como de los números de Love (Singer, 1968; Mignard, 1979, 1980). Esta

suposición implica que, en virtud de la Ec. (2.173) los desfases angulares son proporcionales a la frecuencia. Si, además, se acepta que estos últimos son lo suficientemente pequeños para que sea válida la aproximación  $\sin \epsilon \approx \epsilon$ , entonces se tiene

$$k_l(\omega_{lmpq}) \sin \epsilon_l(\omega_{lmpq}) \approx k_l \epsilon_l = k_l \chi_{lmpq} \operatorname{sgn}(\omega_{lmpq}) \Delta t.$$

Por tal motivo, a este modelo también se lo conoce como aproximación de fricción débil (Alexander, 1973). Entre las implementaciones más modernas de este modelo pueden mencionarse los trabajos de Bolmont *et al.* (2015) y de Zoppetti *et al.* (2019, 2020). Si bien estos dos modelos se han usado ampliamente en la literatura, e incluso se siguen utilizando (Barnes, 2017), es importante señalar que el primero carece de fundamentación física y matemática consistente y que el segundo es válido solamente para frecuencias muy cercanas a las resonancias espín-órbita y para viscosidades muy bajas (Efroimsky y Williams, 2009; Efroimsky, 2012; Efroimsky y Makarov, 2013). Tampoco están sustentados por evidencia geofísica y geodésica (Efroimsky y Lainey, 2007) para el caso de la Tierra y para planetas terrestres, para los cuales es más adecuado usar el modelo de Maxwell o el de Andrade (Renaud y Henning, 2018). Estos últimos modelos, entre otros, se van a presentar a continuación.

Dentro de los modelos más utilizados actualmente en la Teoría de Mareas se encuentra el ya mencionado *modelo de Maxwell* (Makarov *et al.*, 2018; Veras *et al.*, 2019). Un cuerpo celeste que se comporta según este modelo, puede representarse como un resorte y un amortiguador conectados en serie (Renaud y Henning, 2018). El primero, por supuesto, representa el comportamiento elástico, mientras que el segundo da cuenta del comportamiento viscoso. Entonces, los esfuerzos sobre ambos elementos son los mismos y la deformación total es la suma de la deformación del resorte y del amortiguador. Esto es,

$$\mathbb{U} = \overset{(e)}{\mathbb{U}} + \overset{(v)}{\mathbb{U}}, \quad \text{donde} \quad \overset{(e)}{\mathbb{S}} = 2\mu \overset{(e)}{\mathbb{U}} \quad \text{y} \quad \overset{(v)}{\mathbb{S}} = 2\eta \frac{\partial \overset{(v)}{\mathbb{U}}}{\partial t} \quad (3.48)$$

Luego, como los esfuerzos son iguales,

$$\mathbb{S} = \overset{(e)}{\mathbb{S}} = \overset{(v)}{\mathbb{S}} \quad (3.49)$$

la Ec. (3.48) se puede escribir:

$$\dot{\mathbb{S}} + \frac{1}{\tau_M} \mathbb{S} = 2\mu \dot{\mathbb{U}} \quad (3.50)$$

donde  $\tau_M$  se conoce como el *tiempo de Maxwell*, es decir, es el tiempo característico en el que desaparecen las tensiones internas del material una vez retirado el esfuerzo, y viene dado por:

$$\tau_M = \frac{\eta}{\mu} \quad (3.51)$$

Comparando la Ec. (3.50) con la expresión general del operador flexibilidad, dada por la Ec. (3.41), se puede mostrar que el núcleo de dicho operador para el modelo de Maxwell se escribe como:

$$J(t - t') = \left[ J + (t - t') \frac{1}{\eta} \right] \Theta(t - t') \quad (3.52)$$

donde  $J = 1/\mu$ .

En función de la frecuencia, las ecuaciones constitutivas (3.48) se pueden escribir de la forma:

$$\bar{\sigma}_{\gamma\nu}(\chi) = 2\bar{\mu}(\chi)\bar{u}_{\gamma\nu}(\chi), \quad 2\bar{u}_{\gamma\nu}(\chi) = \bar{J}(\chi)\bar{\sigma}_{\gamma\nu}(\chi) \quad (3.53)$$

donde la rigidez y la flexibilidad complejas están dadas por:

$$\bar{\mu}(\chi) = \mu \frac{i\chi\tau_M}{1 + i\chi\tau_M} \quad y \quad \bar{J}(\chi) = J \left( 1 - \frac{i}{\chi\tau_M} \right) = J - \frac{i}{\chi\eta} \quad (3.54)$$

Puede verse que para altas frecuencias un sólido de Maxwell tiene un comportamiento elástico y para bajas frecuencias tiene comportamiento viscoso.

Tomando las partes real e imaginaria de  $\bar{J}(\chi)$  en la última expresión se obtiene:

$$\text{Re } \bar{J}(\chi) = J \quad (3.55a)$$

$$\text{Im } \bar{J}(\chi) = -\frac{1}{\chi\eta} \quad (3.55b)$$

Como puede verse, la parte real de la flexibilidad compleja corresponde al comportamiento puramente elástico, mientras que su parte imaginaria corresponde al comportamiento puramente viscoso, como cabe esperar. Para evitar divergencias en los cálculos numéricos, conviene definir las cantidades  $\mathcal{R}(\chi)$  e  $\mathcal{I}(\chi)$  de la siguiente manera:

$$\mathcal{R}(\chi) = \frac{\chi\tau_M}{J} \text{Re } \bar{J}(\chi) \quad (3.56a)$$

$$\mathcal{I}(\chi) = \frac{\chi\tau_M}{J} \text{Im } \bar{J}(\chi) \quad (3.56b)$$

Luego, para el modelo de Maxwell se tiene:

$$\mathcal{R}(\chi) = \chi\tau_M \quad (3.57a)$$

$$\mathcal{I}(\chi) = -1 \quad (3.57b)$$

En función de las cantidades definidas en la Ec. (3.56), las Ecs. (3.23) quedan expresadas como:

$$K_R(l, \omega) = \frac{3}{2(l-1)} \frac{(\mathcal{R}(\chi) + A_l\chi\tau_M) \mathcal{R}(\chi) + (\mathcal{I}(\chi))^2}{(\mathcal{R}(\chi) + A_l\chi\tau_M)^2 + (\mathcal{I}(\chi))^2} \quad (3.58a)$$

$$K_I(l, \omega) = -\frac{3}{2(l-1)} \frac{A_l\chi\tau_M \mathcal{I}(\chi)}{(\mathcal{R}(\chi) + A_l\chi\tau_M)^2 + (\mathcal{I}(\chi))^2} \text{sgn}(\omega_{lmpq}) \quad (3.58b)$$

En particular, para el modelo de Maxwell,  $K_R(l, \chi)$  y  $K_I(l, \chi)$  vienen dados por:

$$K_R(l, \omega) = \frac{3}{2(l-1)} \frac{(1 + A_l\chi\tau_M) \chi^2\tau_M^2 + 1}{(1 + A_l)^2 \chi^2\tau_M^2 + 1} \quad (3.59a)$$

$$K_I(l, \omega) = \frac{3}{2(l-1)} \frac{A_l\chi\tau_M}{(1 + A_l)^2 \chi^2\tau_M^2 + 1} \text{sgn}(\omega_{lmpq}) \quad (3.59b)$$

El comportamiento reológico de las estrellas puede modelarse como el de un cuerpo viscoso (Veras *et al.*, 2019). En este sentido, puede considerarse dicho comportamiento como un caso límite de la reología de Maxwell, en el cual  $J = 0$ , con lo que se tiene:

$$\text{Re } \bar{J}(\chi) = 0 \quad (3.60a)$$

$$\text{Im } \bar{J}(\chi) = -\frac{1}{\chi\eta} \quad (3.60b)$$



En consecuencia,

$$K_R(l, \omega) = \frac{3}{2(l-1)} \frac{1}{(B_l \chi \eta)^2 + 1} \quad (3.61a)$$

$$K_I(l, \omega) = \frac{3}{2(l-1)} \frac{B_l \chi \eta}{(B_l \chi \eta)^2 + 1} \text{sgn}(\omega_{lmpq}) \quad (3.61b)$$

donde  $B_l = A_l J$  (Efroimsky, 2015).

Otro modelo muy utilizado es el *modelo de Maxwell-Andrade*, el cual describe muy satisfactoriamente el comportamiento reológico de planetas rocosos. En este caso, el núcleo del operador flexibilidad está dado por:

$$J(t - t') = J \left[ 1 + \left( \frac{t - t'}{\tau_A} \right)^\alpha + \frac{t - t'}{\tau_M} \right] \Theta(t - t') \quad (3.62)$$

Como puede verse, el modelo de Maxwell-Andrade agrega al modelo de Maxwell un término que da una respuesta de tipo hereditaria, siendo  $\tau_A$  su tiempo característico.

Es interesante destacar que los valores que asume el parámetro  $\alpha$  (que es propio de cada material) se encuentran en el intervalo  $[0,14, 0,4]$  para todos los minerales, incluyendo hielos; hecho que resulta sorprendente (Efroimsky, 2012).

En función de la frecuencia, la flexibilidad compleja viene dada por la expresión:

$$\bar{J}(\chi) = J \left[ 1 + (i \chi \tau_A)^{-\alpha} \Gamma(1 + \alpha) - i (\chi \tau_M)^{-1} \right], \quad (3.63)$$

donde  $\Gamma$  es la función gamma. Las partes real e imaginaria de la misma son:

$$\text{Re} [\bar{J}(\chi)] = J + J (\chi \tau_A)^{-\alpha} \cos \left( \frac{\alpha \pi}{2} \right) \Gamma(\alpha + 1), \quad (3.64)$$

$$\text{Im} [J(\bar{\chi})] = -J (\chi \tau_M)^{-1} - J (\chi \tau_A)^{-\alpha} \sin \left( \frac{\alpha \pi}{2} \right) \Gamma(\alpha + 1). \quad (3.65)$$

Las cantidades  $\mathcal{R}(\chi)$  e  $\mathcal{I}(\chi)$  vienen dadas por:

$$\mathcal{R}(\chi) = \chi \tau_M \left[ 1 + (\tau_M \zeta \chi)^{-\alpha} \Gamma(\alpha + 1) \cos \left( \frac{\pi \alpha}{2} \right) \right], \quad (3.66a)$$

$$\mathcal{I}(\chi) = - \left[ 1 + (\chi \tau_M)^{-\alpha} \Gamma(\alpha + 1) \sin \left( \frac{\pi \alpha}{2} \right) \right], \quad (3.66b)$$

donde  $\zeta = \tau_A / \tau_M$ .

Conviene detenerse en este punto para destacar dos aspectos importantes acerca de la reología de Andrade. En primer lugar, se ha demostrado (Castillo-Rogez *et al.*, 2011) que ante tensiones bajas los tiempos característicos de las dos reacciones antes mencionadas son similares:

$$\tau_A \approx \tau_M \quad (3.67a)$$

o, equivalentemente:

$$\zeta \approx 1 \quad (3.67b)$$

En segundo lugar, Karato y Spetzler (1990) señalan que el mecanismo de disipación anelástico es efectivo en el manto terrestre hasta la frecuencia límite  $\chi_0 \simeq 1 \text{ año}^{-1}$ . A frecuencias menores, dicho mecanismo es menos eficiente dando lugar al comportamiento viscoelástico. Esto es, a bajas frecuencias el manto se comporta como un sólido de Maxwell. En consecuencia, para frecuencias mayores que  $\chi_0$ , la anelasticidad es el



mecanismo de disipación dominante y, por lo tanto, en dicho régimen de frecuencias se satisface la Ec. (3.67) (Efroimsky, 2012).

Más allá de todas las complicaciones matemáticas que pueden apreciarse en el presentado formalismo de los números de Love complejos, es importante destacar que el mismo constituye un marco teórico que permite la inclusión de cualquier reología lineal y, por lo tanto, resulta ser más realista que los modelos sencillos de Kaula (1964), Singer (1968) y Mignard (1979, 1980) y aquél presentado en el trabajo de Efroimsky y Lainey (2007). Ahora bien, como sucede con cualquier modelo, el mismo debe ser validado y para esto se deben comparar sus resultados con otros obtenidos previamente, y con mediciones u observaciones, de ser todo esto posible.

# Capítulo 4

## Validación del modelo desarrollado

En el presente capítulo se centra la atención en la validación de la metodología desarrollada en esta tesis tanto en el aspecto analítico como en el numérico o computacional. Quizás sea prudente aclarar que la validación analítica consiste en la reproducción de ecuaciones de movimiento que han sido ampliamente utilizadas en la literatura produciendo haciendo uso del formalismo de Darwin-Kaula. Si bien esto puede parecer trivial, puesto que el formalismo construido en este trabajo en sí mismo se basa en el de Darwin-Kaula antes mencionado, la deducción de ecuaciones particulares a partir de otras más generales —como las obtenidas aquí— es, no obstante, una práctica muy recomendable a fin de garantizar la fiabilidad de los resultados que se obtengan a partir de la expresión computacional de los resultados teóricos alcanzados en el presente documento.

La validación numérica del formalismo construido —que, sin duda, está directamente relacionada con las validaciones de carácter analítico— se basa en la expresión computacional de la formulación teórica desarrollada para su aplicación en el modelado, simulación y estudio de sistemas planetarios específicos. Se trata, por lo tanto, de estudiar sistemas ya reportados en la literatura, reproducir resultados ya obtenidos en este campo de investigación, verificar si existen diferencias y, en ese caso, tratar de explicarlas desde este nuevo contexto de aplicación.

A partir, entonces, de los objetivos planteados, en este trabajo se estudiarán aspectos de particular interés en dos sistemas planetarios de nuestro Sistema Solar: (1) análisis de la evolución rotacional de Mercurio y (2) evolución orbital del sistema Marte-Fobos.

### 4.1. Validaciones de carácter analítico

En consonancia con lo expresado en el párrafo anterior, se va a considerar primero el caso de Mercurio a modo de validación de las ecuaciones de movimiento que determinan la evolución rotacional de cuerpos celestes. Como se sabe, dicho planeta se encuentra capturado en la resonancia espín-órbita 3:2 ([Pettengill y Dyce, 1965](#)); esto es, si  $P_{\text{orb}}$  y  $P_{\text{rot}}$  son el periodo orbital y rotacional de Mercurio, respectivamente, entonces se cumple que  $2P_{\text{orb}} \approx 3P_{\text{rot}}$ .

Posteriormente se va a abordar el problema de la evolución orbital de Fobos, el satélite de Marte más cercano a la superficie de este planeta. El aspecto más interesante de este caso es el hecho de que el semieje mayor de la órbita de Fobos respecto a Marte se está reduciendo paulatinamente. Esto se traduce en un aumento gradual de

la frecuencia orbital media ( $n$ ) de dicho satélite, en virtud de la Ec. (2.63). Es esta variación secular de  $n$  en el tiempo la que indica la reducción sostenida de  $a$  y que se atribuye a la interacción de mareas (Bills *et al.*, 2005).

#### 4.1.1. Evolución rotacional, torque secular de mareas y torque triaxial

La Ec. (2.262m) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = & \frac{1}{C_2} \left( \frac{3}{2} \frac{G m_1^2}{a} \left( \frac{R_2}{a} \right)^5 \sum_{q=-q_{\max}}^{q_{\max}} G_{20q}^2(e) K_I^{(2)} \left( 2, \omega_{lmpq}^{(2)} \right) \right. \\ & \left. + \frac{3}{2} \frac{G(B-A)}{a^3} \sum_{q=-q_{\max}}^{q_{\max}} G_{lpq}(e) \sin [(2+q)M + 2(\omega_2 + \delta\omega_2 - \theta_2)] \right) \quad (4.1) \end{aligned}$$

El primer término entre paréntesis es el conocido torque de mareas, mientras que el segundo es el torque triaxial. La Ec. (4.1) es la ecuación más utilizada para estudiar la dinámica rotacional cerca de las llamadas resonancias espín-órbita (Makarov, 2012; Makarov *et al.*, 2012), dado que la interrelación entre los torques mencionados determina si un planeta, satélite o cualquier otro cuerpo celeste resulte capturado o no en alguna de dichas resonancias. Un ejemplo interesante es el estudio de la captura de Mercurio en la resonancia 3:2 (Noyelles *et al.*, 2014). Tomando este trabajo como caso de análisis, es posible verificar que la Ec. (4.1) obtenida a partir de la formulación construida en este trabajo, que da la aceleración angular del cuerpo celeste estudiado, coincide con las expresiones utilizadas por los autores mencionados que han sido derivadas siguiendo otros recorridos teóricos.

En relación con lo anterior, si ahora consideramos la ecuación de la aceleración angular debida solamente a los términos seculares del torque de mareas dada por:

$$\left\langle \frac{d^2\theta_2}{dt^2} \right\rangle = \frac{3}{2} \frac{G m_1^2}{a C_2} \left( \frac{R_2}{a} \right)^5 \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{20q}^2(e) K_I^{(2)} \left( 2, \omega_{lmpq}^{(2)} \right) \quad (4.2)$$

es posible verificar que coincide con las correspondientes ecuaciones que dan la evolución rotacional de los sistemas binarios considerados por Veras *et al.* (2019).

#### 4.1.2. Evolución orbital y tasa de variación temporal del semieje mayor

En el primer capítulo, cuando se expusieron las características principales de la interacción de mareas, se explicó que debido a la misma el semieje mayor de la órbita de Fobos está disminuyendo en el tiempo. Este problema fue abordado hace unos años por Efroimsky y Lainey (2007), donde utilizaron tres modelos reológicos para estudiar la evolución temporal de dicho parámetro orbital.

La ecuación a validar tanto de forma analítica, en este apartado, como de forma numérica en la sección siguiente es la que obtuvieron Efroimsky y Lainey (2007) que da la derivada respecto al tiempo del semieje mayor de la órbita de Fobos en torno a Marte, considerando solamente las mareas que el primero eleva en el segundo (Ec. (36) del citado trabajo). Dicha ecuación fue obtenida a partir de las ecuaciones planetarias

en la forma de Euler-Gauss ([Beutler et al., 2004](#)) en lugar de la forma de Lagrange, como se hizo en este trabajo. Para lograr el mismo nivel de aproximación analítica, se deben imponer a la Ec. (2.296a) las mismas suposiciones consideradas por [Efroimsky y Lainey \(2007\)](#). En primer lugar, se tiene en cuenta solamente la disipación en Marte debido a la interacción de mareas. En segundo lugar solamente se considera la frecuencia principal de mareas, es decir  $\chi_{2200}$ , esto es  $q = 0$ . En tercer lugar, los autores también desprecian tanto la excentricidad como la inclinación de la órbita de Fobos. En consecuencia, se tiene  $G_{200}^2(0) = 1$  y  $x_1 = 1$ . Si se identifica con el índice 1 a Marte y con el índice 2 a Fobos, entonces la Ec. (2.296a) toma la forma:

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = -3 n a \frac{m_2}{m_1} \left( \frac{R}{a} \right)^5 K_I(2, \omega_{2200}) \quad (4.3)$$

Los índices del radio, del factor de calidad y de la frecuencia se han omitido por cuestiones de simplicidad, dado que no son necesarios en este caso. Si, por último, se tiene en cuenta que [Efroimsky y Lainey \(2007\)](#) consideraron el modelo CTL para describir la reología de Marte (aunque también proponen un modelo que da la dependencia de los  $\Delta t$  con la frecuencia), entonces

$$\begin{aligned} K_I(2, \omega_{2200}) &= \chi_{2200} \operatorname{sgn}(\omega_{2200}) \Delta t \\ &= 2|n - \dot{\theta}| \operatorname{sgn}(n - \dot{\theta}) \Delta t \\ &= 2(n - \dot{\theta}) \Delta t \end{aligned} \quad (4.4)$$

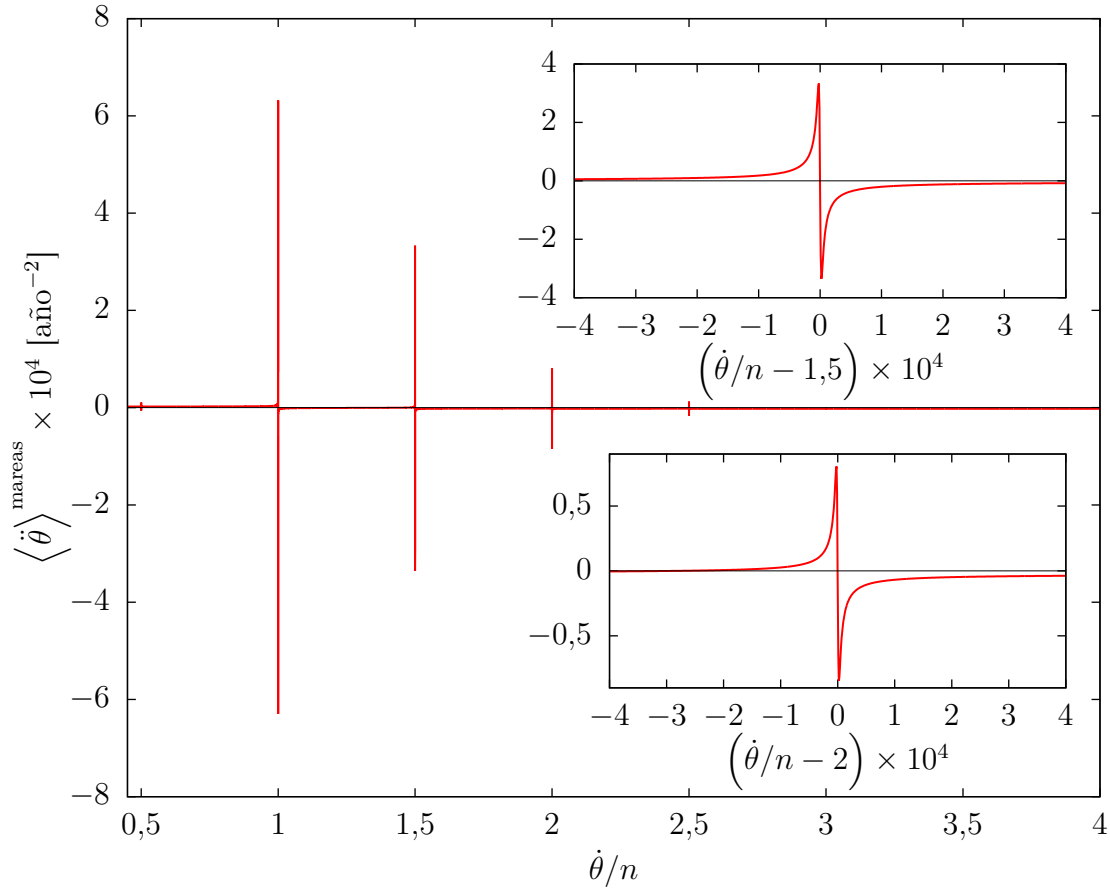
donde  $\dot{\theta}$  es la velocidad de rotación de Marte. Reemplazando esta última expresión en la Ec. (4.3) obtenida a partir de la formulación construida en este trabajo, se recupera exactamente la Ec. (36) del artículo citado anteriormente.

## 4.2. Validaciones de carácter numérico

### 4.2.1. Evolución rotacional de Mercurio

La Fig. 4.1 muestra la gráfica de la aceleración debida a los términos seculares del torque de mareas obtenida mediante evaluación directa de la Ec. (4.2). Los valores de los parámetros necesarios para realizar la simulación aplicando el modelo desarrollado a partir de la formulación construida en este trabajo se tomaron del artículo de [Noyelles et al. \(2014\)](#). En la mencionada figura también se muestran ampliaciones de dos entornos muy estrechos alrededor de las resonancias 3:2 y 2:1, donde se pueden apreciar las formas típicas de la aceleración mareal que reflejan la variación del factor de calidad asociado a la parte imaginaria de los números de Love complejos con la frecuencia. Cabe destacar que las gráficas correspondientes a esas dos ampliaciones concuerdan con las figuras correspondientes del trabajo de [Noyelles et al. \(2014\)](#), con lo que se puede afirmar que el formalismo desarrollado en esta tesis es capaz de reproducir fielmente los resultados del trabajo citado anteriormente.

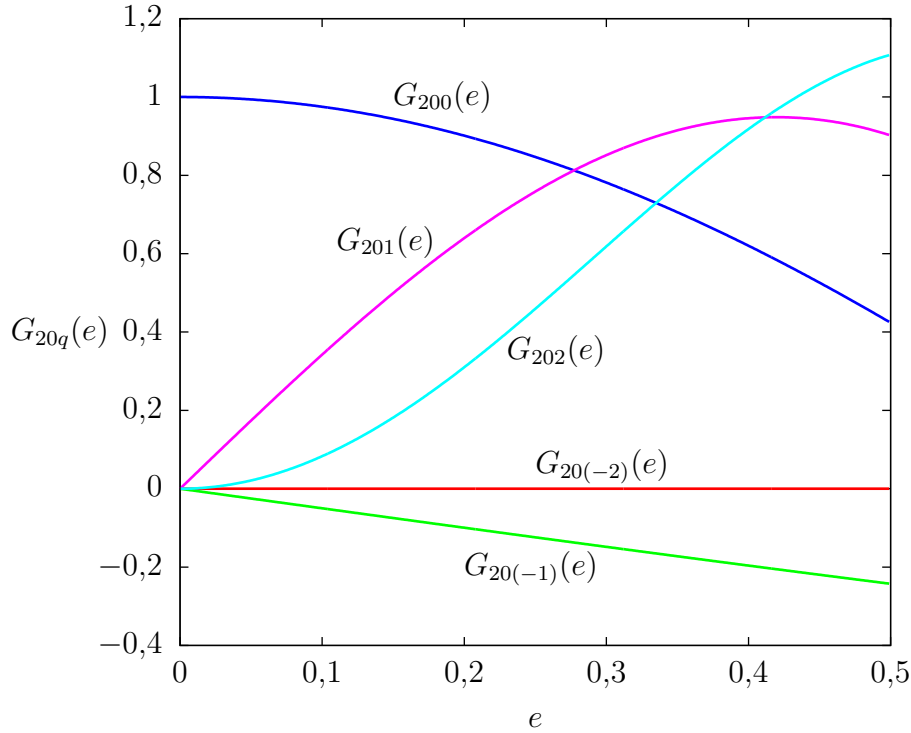
Tal como se observa en la Ec. (4.2), la aceleración angular debida a los términos seculares del torque de mareas es una combinación lineal de los factores de calidad antes mencionados y las funciones de la excentricidad elevadas al cuadrado. Las anteriores tienen la propiedad de anularse cuando la frecuencia asociada es cero. Dado que cada



**Figura 4.1:** Aceleración angular de Mercurio debida a los términos seculares del torque de mareas vs. la velocidad normalizada. Se han ampliado dos entornos alrededor de las resonancias 3:2 y 2:1 por razones de claridad.

función de calidad, evaluada en cada frecuencia correspondiente a distintos valores de  $q$ , está modulada por la correspondiente función de la excentricidad (al cuadrado) y están todas sumadas, ocurre que la aceleración angular no es exactamente cero cuando la frecuencia asociada a una resonancia en particular se anula (Makarov *et al.*, 2012). Otro aspecto interesante es que, como se observa también en la Fig. 4.1, la aceleración angular es negativa a la derecha de cada resonancia y es positiva a la izquierda de la misma. Por supuesto, esto último es válido en entornos muy cercanos a las resonancias, cuando nos alejamos de esta situación la aceleración angular puede cambiar de signo nuevamente.

Cabe destacar que el comportamiento registrado en la Fig. 4.1 puede cambiar drásticamente si, por ejemplo, se baja la excentricidad a cero. En tal caso, y en virtud de la Fig. 4.2, la amplitud de la aceleración angular alrededor de cada resonancia se reduciría hasta anularse, excepto en el entorno de la resonancia 1:1, esto es  $q = 0$ . En consecuencia, el único estado rotacional posible de Mercurio sería el que corresponde a la corrotación. Dada la elevada excentricidad de Mercurio, Makarov (2012) mostró, utilizando la reología de Maxwell-Andrade para describir la disipación dentro del mismo, que la resonancia 3:2 tiene una probabilidad significativa de ocurrir, resultado que se corresponde con la realidad. En cambio, si se utilizan otros modelos más sencillos como el CPL y el CTL, tal como hicieron Goldreich y Peale (1966), la probabilidad de captura en la resonancia 3:2 resulta demasiado baja para ser plausible.



**Figura 4.2:** Algunas funciones de la excentricidad en función de  $e$ . Solamente  $G_{200}(e)$  tiende a 1 a medida que la excentricidad tiende a cero.

#### 4.2.2. Evolución orbital de Fobos

La validación numérica, en este caso, consiste en recuperar los resultados obtenidos por [Efroimsky y Lainey \(2007\)](#) integrando numéricamente las ecuaciones de movimiento obtenidas en este trabajo —Ecs. (2.296) y (2.298)— y utilizando los mismos modelos reológicos —tres, en total— que usaron los autores antes citados. Los dos primeros son los modelos CPL y CTL que ya fueron expuestos en la Sección 3.4. Teniendo en cuenta el primero de ellos, la Ec. (4.3) queda expresada como:

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = -3 n a \frac{m_2}{m_1} \left( \frac{R}{a} \right)^5 \frac{k_2}{Q}. \quad (4.5)$$

Esta ecuación puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = -3 \frac{G m_2}{\sqrt{G(m_1 + m_2)}} \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \frac{R^5}{a^{11/2}} \frac{k_2}{Q}. \quad (4.6)$$

Si en esta última expresión se desprecia el cociente  $m_2/m_1$  —dado que  $m_2 \ll m_1$ —, entonces se obtiene exactamente la Ec. (41) de [Kaula \(1964\)](#) citada en el trabajo de [Efroimsky y Lainey \(2007\)](#). La Ec. (4.6) admite solución analítica, la cual será considerada a fin de comparar con los resultados que se obtengan de la integración de las Ecs. (2.296), al menos para la evolución temporal del semieje mayor de la órbita de Fobos. Dicha solución viene dada por:

$$a(t) = \left( -\frac{39 k_2 R^5 G m}{2 Q \sqrt{G(m_1 + m_2)}} t + a_0^{13/2} \right)^{2/13} \quad (4.7)$$

donde  $a_0$  es el valor inicial (actual) del semieje mayor.

Considerando ahora el modelo CTL, reemplazando la Ec. (4.4) en la Ec. (4.3), se obtiene:

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = -6 n a \frac{m_2}{m_1} \left( \frac{R}{a} \right)^5 (n - \dot{\theta}) \Delta t. \quad (4.8)$$

Tanto esta última ecuación como las Ecs. (2.296) y (2.298) no admiten solución analítica. Sin embargo, con el fin de obtener una validación del formalismo desarrollado será suficiente corroborar que la solución obtenida de  $a$  a partir de la integración numérica de las Ecs. (2.296) y (2.298) considerando el modelo CPL sea consistente con la solución analítica dada en la Ec. (4.7).

Si bien los modelos reológicos presentados en el párrafo anterior son sencillos y pueden simplificar en gran medida los cálculos a realizar, vale la pena insistir en que no son validados por mediciones geodésicas ni por evidencia experimental provenientes de investigaciones geofísicas, los cuales, en cambio, favorecen una ley exponencial (Efroimsky y Lainey, 2007; Efroimsky, 2012), que se expresa matemáticamente como:

$$\text{sen } \epsilon \simeq \epsilon \propto \chi^{-\alpha}$$

donde  $\alpha$  varía entre 0,2 y 0,4 para la mayoría de los materiales —el límite inferior puede ser menor para aquellos parcialmente fundidos—. Dicha ley también puede expresarse como una igualdad introduciendo una constante de proporcionalidad adecuada, esto es:

$$\epsilon = \mathcal{E}^{-\alpha} \chi^{-\alpha} \quad (4.9)$$

y, en virtud de la Ec. (2.173), se tiene:

$$\Delta t = \mathcal{E}^{-\alpha} \chi^{-(\alpha+1)} \quad (4.10)$$

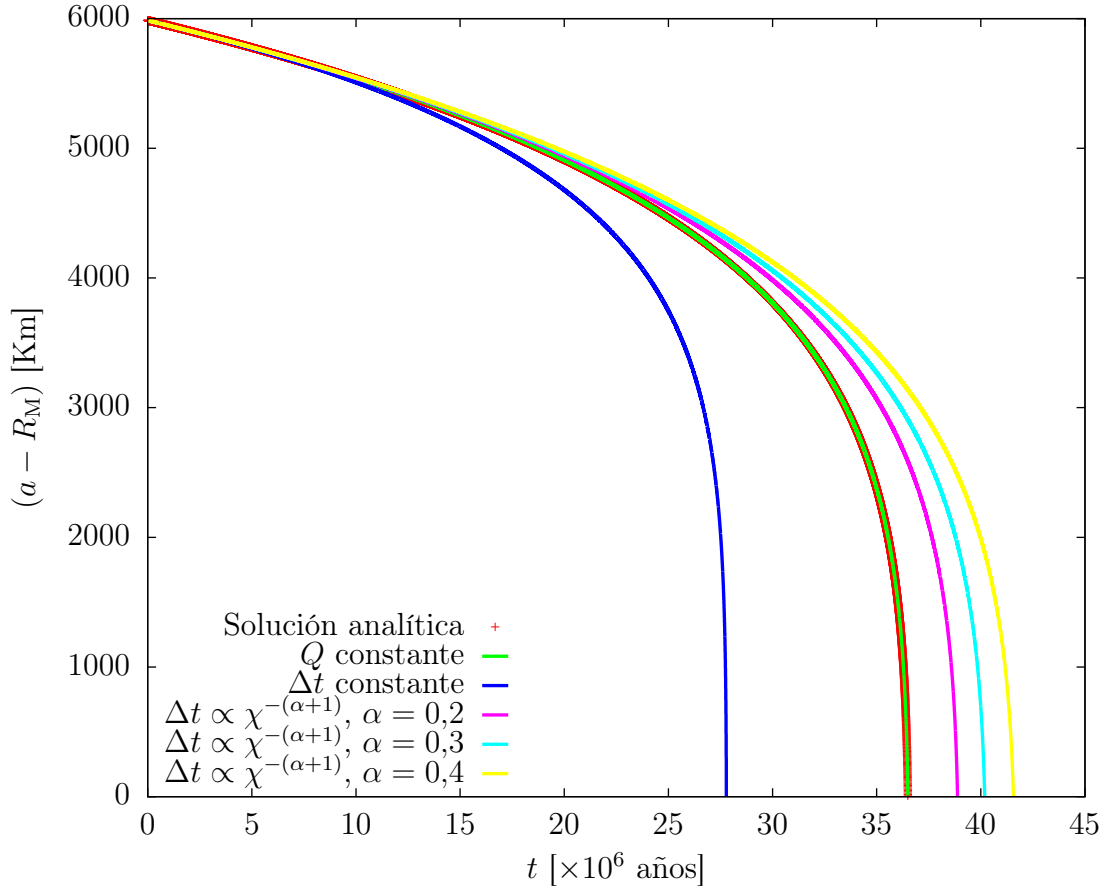
Utilizando los tres modelos reológicos mencionados, Efroimsky y Lainey (2007) integraron numéricamente la Ec. (4.8) con el fin de mostrar cómo pueden variar las conclusiones acerca de la evolución orbital de Fobos, debido a la interacción de mareas —considerando a Marte como el primario y, también,  $k_2$  constante—, dependiendo del modelo reológico utilizado.

En la Fig. 4.3 se presentan los resultados obtenidos a partir de la integración numérica de las Ecs. (2.296) y (2.298) que han sido derivadas a partir del formalismo desarrollado en este trabajo. Como puede observarse en la figura, la solución numérica obtenida incorporando al modelo reológico CPL en nuestra formulación está en perfecto acuerdo con la correspondiente solución analítica.

Vale la pena mencionar que este mismo problema fue abordado por Luna *et al.* (2018a) utilizando la reología de Maxwell-Andrade. En el mismo, los autores no solo lograron modelar la dinámica orbital de Fobos, sino que también pudieron estimar los parámetros reológicos más relevantes de Marte.

### 4.3. Síntesis de los resultados obtenidos

Los resultados expuestos anteriormente indican que es posible recuperar de forma precisa los resultados obtenidos por otros autores con el formalismo aquí desarrollado, dando cuenta de la dinámica rotacional y orbital de sistemas planetarios de gran relevancia en este campo de trabajo. También, por esto, se considera que los resultados



**Figura 4.3:** Resultados de la evolución temporal del semieje mayor de la órbita de Fobos obtenidos de la interacción numérica de las Ecs. (2.296) y (2.298) usando las reologías consideradas por [Efroimsky y Lainey \(2007\)](#).

de validación que se han presentado en esta sección tienen valor por sí mismos, ya que pueden dar lugar a nuevas líneas de investigación y nuevos desafíos en trabajos futuros.

El formalismo desarrollado y validado, entonces, constituye la base para la construcción de modelos de diversos sistemas planetarios binarios, considerando los efectos de la interacción de mareas junto con el comportamiento reológico de los cuerpos intervinientes y la triaxialidad de los mismos, posibilitando todo esto su estudio en diferentes condiciones de simulación.

Finalmente, es importante destacar que si en las Ecs. (2.274a), (2.274b), (2.274d) y (2.274e) se reemplazan las expresiones correspondientes a cada cuerpo de las derivadas de los potenciales de mareas respecto de  $M$ , de  $\omega_k$  y de  $\Omega_k$ , dadas por las Ecs. (2.267), (2.248) y (2.257), se llega inmediatamente las ecuaciones que dan la evolución temporal del semieje mayor, la excentricidad y las inclinaciones obtenidas por [Boué y Efroimsky \(2019\)](#) y consideradas por [Veras et al. \(2019\)](#) para el estudio de la evolución dinámica de sistemas binarios formados por un planeta y una estrella enana blanca. Cabe mencionar también que [Veras et al. \(2019\)](#) consideraron la evolución rotacional descrita por las Ecs. (2.298a) y (2.298b), pero sin tener en cuenta el torque triaxial en la última ecuación.



# Capítulo 5

## Estudio de la dinámica orbital y rotacional del sistema Kepler-21

El presente capítulo está dedicado a la presentación de los resultados obtenidos con el modelo computacional construido a partir del marco teórico desarrollado y expuesto en los capítulos anteriores de este trabajo de tesis. El problema explorado es la evolución dinámica del sistema Kepler-21 debido a la interacción de mareas, considerando la disipación en ambos cuerpos y la triaxialidad del planeta (Luna *et al.*, 2019). Cabe destacar que además de los resultados que se van a mostrar a continuación, los métodos anteriormente explicados han sido aplicados en otros contextos como la exploración de la posibilidad de que Fobos sea un asteroide capturado por Marte (Luna *et al.*, 2018b) y en la evaluación de las probabilidades de captura en el sistema exoplanetario HD 154088 (Luna *et al.*, 2016).

### 5.1. Discusión preliminar

En esta sección, se describe en primer lugar el sistema Kepler-21 seleccionado como caso de análisis y de aplicación del formalismo desarrollado y se presenta el modelo construido para la implementación de las simulaciones computacionales. Luego, se analizan los modelos reológicos que mejor caracterizan el comportamiento de cada componente del sistema en estudio, se consideran los parámetros físicos y reológicos, y las condiciones iniciales necesarias para la implementación de las simulaciones numéricas, especialmente aquellas que corresponden a la evolución rotacional del planeta.

#### 5.1.1. El sistema Kepler-21

La estrella Kepler-21, también conocida como HD 179070, es una subgigante de tipo espectral F6IV que se encuentra a una distancia de 352 años-luz de distancia en la constelación de Lyra. En la Tabla 5.1 se muestran los valores de los parámetros físicos y orbitales del sistema. Kepler-21 alberga un planeta presumiblemente rocoso. Esto puede estimarse de la relación masa-radio, tal como se muestra en la Fig. 5.1. En la misma pueden observarse también varias curvas correspondientes a relaciones masa-radio con distintos valores de la fracción de masa de hielo, que da una idea de la cantidad de agua que podría tener el planeta. Para el caso de Kepler-21b, esta última sería de un 10% , aproximadamente. También, es importante destacar que, según nuestro conocimiento actual sobre la temática, todavía no se han desarrollado

**Tabla 5.1:** Valores de los parámetros físicos y orbitales relevantes del sistema Kepler-21 estudiado en este trabajo (López-Morales *et al.*, 2016).

Parámetro	Símbolo	Unidad	Valor
Parámetros estelares			
Masa	$m_1$	$M_\odot$	1,408
Radio	$R_1$	$R_\odot$	1,902
Periodo rotacional	$P_{\text{rot},1}$	Días	12,6
Parámetros planetarios			
Masa	$m_2$	$M_\oplus$	5,10
Radio	$R_2$	$R_\oplus$	1,639
Parámetros orbitales			
Periodo orbital	$P_{\text{orb}}$	Días	2,78578
Semieje mayor	$a$	UA	0,0427172
Excentricidad	$e$	(Adimensional)	0,02

estudios sobre la dinámica de este sistema planetario con las herramientas teóricas desarrolladas en esta tesis y hacerlo constituye de por sí una contribución de relevancia en este campo del conocimiento.

Este sistema se eligió por dos razones principales: la primera es que dada la proximidad del planeta a su estrella anfitriona, se espera que los efectos de mareas sean muy significativos. La segunda razón es que los parámetros relevantes al estudio que se pretende llevar a cabo están bien determinados.

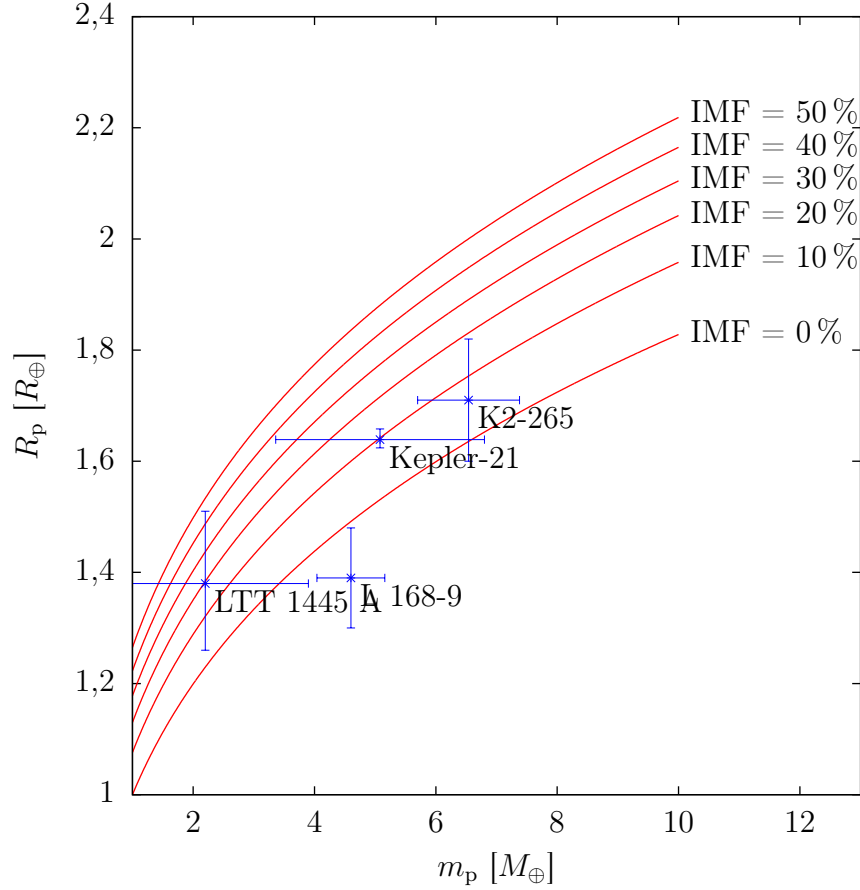
### 5.1.2. Modelo adoptado

Dentro de los efectos a tener en cuenta, se consideran las mareas que cada uno de los cuerpos eleva en el otro y, también, la triaxialidad del planeta. Más específicamente, se considera el efecto de los términos seculares asociados al coeficiente  $J_2$  en la dinámica orbital y, además, se tiene en cuenta la influencia del coeficiente  $C_{22}$  en la dinámica rotacional. En este estudio, se analizará la evolución temporal del semieje mayor de la órbita, su excentricidad, las dos inclinaciones —o bien, la inclinación y la oblicuidad del planeta— y, por supuesto, las velocidades de rotación de cada cuerpo. Para identificar ambos cuerpos celestes en las ecuaciones se reserva el índice 1 para la estrella anfitriona y el índice 2 para el planeta.

En el Capítulo 2, a partir del formalismo desarrollado se dedujeron las ecuaciones de movimiento —Ecs. (2.296) y (2.298)— que describen tanto la evolución rotacional como orbital del sistema considerado. Según se señaló en la Sección 2.5, se limita la expansión de los potenciales perturbadores a los términos con  $l = 2$ . Esta aproximación está justificada para valores bajos de la excentricidad, tal como es el caso de Kepler-21 (Boué y Efroimsky, 2019).

### 5.1.3. Reología de los componentes

Dado que se va a considerar la disipación de ambos cuerpos, resulta necesario seleccionar el modelo reológico que pueda describir la respuesta de cada cuerpo como un todo ante las fuerzas que los deforman. Teniendo en cuenta esto, a continuación se realizan consideraciones sobre la reología de estrellas y de planetas.



**Figura 5.1:** Radio (radios terrestres) vs. masa (masas terrestres) de algunas supertierras junto con la gráfica de varias relaciones masa-radio para planetas rocosos según la fracción de masa de hielo, tomadas de [Valencia et al. \(2007a\)](#).

### Reología de estrellas

Tal como lo discuten [Veras et al. \(2019\)](#), las estrellas pueden considerarse como cuerpos viscosos, más allá de que puedan tener cierta rigidez magnética. Por lo tanto, el parámetro dominante de su reología es la viscosidad  $\eta_1$ . A partir del trabajo de [Efroimsky \(2012\)](#) se sabe que la flexibilidad compleja para este tipo de reología está dada por:

$$\bar{J}(\chi) = -\frac{i}{\eta_1 \chi} \quad (5.1)$$

Por lo tanto, sus partes real e imaginaria son:

$$\text{Re} [\bar{J}(\chi)] = 0 \quad \text{y} \quad \text{Im} [\bar{J}(\chi)] = \frac{1}{\eta_1 \chi} \quad (5.2)$$

En consecuencia, las partes real e imaginaria del número de Love complejo, necesarias para la implementación del modelo computacional en el contexto del formalismo desarrollado en este trabajo, son precisamente las Ecs. (3.61):

$$K_R^{(1)} \left( l, \chi_{lmpq}^{(1)} \right) = \frac{3}{2} \frac{1}{(l-1)} \frac{1}{1 + \left( B_l \eta_1 \chi_{lmpq}^{(1)} \right)^2} \quad (5.3a)$$

y

$$K_I^{(1)}(l, \chi_{lmpq}^{(1)}) = \frac{3}{2} \frac{1}{(l-1)} \frac{B_l \eta_1 \chi_{lmpq}^{(1)}}{1 + (B_l \eta_1 \chi_{lmpq}^{(1)})^2} \operatorname{sgn}(\omega_{lmpq}). \quad (5.3b)$$

## Reología de planetas rocosos

La respuesta de cuerpos celestes rocosos como planetas y satélites ante las fuerzas que los deforman, que incluso puedan tener su superficie cubierta de hielo y, aún más, que pueden albergar un océano subsuperficial, se puede modelar adecuadamente por el modelo de Maxwell-Andrade ([Efroimsky, 2012](#)) o bien por el modelo de [Sundberg y Cooper \(2010\)](#), tal como lo describen [Renaud y Henning \(2018\)](#). Debido a la complejidad del último modelo y al hecho de que los parámetros reológicos se conocen con poca certeza, incluso para la Tierra, en el presente estudio se eligió utilizar el modelo de Maxwell-Andrade. La flexibilidad compleja para esta reología está dada por:

$$\begin{aligned} \bar{J}(\chi) &= J - \frac{i}{\eta \chi} + J (i \chi \tau_A)^{-\alpha} \Gamma(1 + \alpha) \\ &= J \left[ 1 - \frac{i}{\chi \tau_M} + (i \chi \tau_A)^{-\alpha} \Gamma(1 + \alpha) \right], \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde  $\alpha$  es el parámetro de Andrade,  $\Gamma$  es la función Gamma,  $\tau_M$  y  $\tau_A$  son los tiempos característicos de Maxwell y Andrade, respectivamente. Cabe mencionar que el primero se define como la razón entre la viscosidad y la rigidez:

$$\tau_M = \frac{\eta_2}{\mu_2} \quad (5.5)$$

Puede verse que los dos primeros términos de la primera línea de la Ec. (5.4) corresponden a la respuesta viscoelástica, mientras que el tercero corresponde a la reacción hereditaria causada por procesos de dislocación y fluencia de vacancias ([Efroimsky, 2012](#)). La reología de Andrade es aplicable a un espectro amplio de materiales, desde planetas rocosos parcialmente fundidos hasta cuerpos helados, incluso si estos poseen un océano bajo sus superficies. El parámetro de Andrade toma valores en el intervalo  $[0,15; 0,2]$  para el primer tipo de cuerpos celestes y en el intervalo  $[0,2; 0,4]$  para el segundo tipo.

Las partes real e imaginaria de la flexibilidad compleja para la reología de Andrade son:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [\bar{J}(\chi)] &= \frac{J}{\chi \tau_M} \left[ \chi \tau_M + \chi^{1-\alpha} \tau_M \tau_A^{-\alpha} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \Gamma(1 + \alpha) \right] \\ &= \frac{J}{\chi \tau_M} \mathcal{R}(\chi) \end{aligned} \quad (5.6)$$

y

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} [\bar{J}(\chi)] &= -\frac{J}{\chi \tau_M} \left[ 1 + \chi^{1-\alpha} \tau_M \tau_A^{-\alpha} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \Gamma(1 + \alpha) \right] \\ &= \frac{J}{\chi \tau_M} \mathcal{I}(\chi). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Luego, las partes real e imaginaria del número de Love complejo para la reología de Maxwell-Andrade, que es necesario introducir en el modelo computacional del sistema en estudio, están dadas por:

$$K_R^{(2)}(l, \omega_{lmpq}^{(2)}) = \frac{3}{2} \frac{1}{l-1} \frac{\left[ \mathcal{R}(\chi_{lmpq}^{(2)}) + A_l \chi_{lmpq}^{(2)} \tau_M \right] \mathcal{R}(\chi_{lmpq}^{(2)}) + \mathcal{I}^2(\chi_{lmpq}^{(2)})}{\left[ \mathcal{R}(\chi_{lmpq}^{(2)}) + A_l \chi_{lmpq}^{(2)} \tau_M \right]^2 + \mathcal{I}^2(\chi_{lmpq}^{(2)})} \quad (5.8a)$$

y

$$K_I^{(2)}(l, \omega_{lmpq}^{(2)}) = -\frac{3}{2} \frac{1}{l-1} \frac{A_l \chi_{lmpq}^{(2)} \tau_M \mathcal{I}(\chi_{lmpq}^{(2)})}{\left[ \mathcal{R}(\chi_{lmpq}^{(2)}) + A_l \chi_{lmpq}^{(2)} \tau_M \right]^2 + \mathcal{I}^2(\chi_{lmpq}^{(2)})} \text{sgn}(\omega_{lmpq}^{(2)}). \quad (5.8b)$$

### Condiciones iniciales y parámetros físicos

Además de los valores dados en la Tabla 5.1, por un lado se deben fijar los valores de otros parámetros físicos y reológicos y, por otro lado, se deben dar los valores iniciales de los parámetros rotacionales y orbitales para poder resolver las ecuaciones de movimiento.

Con respecto a los parámetros reológicos de la estrella anfitriona y del planeta, se deben fijar el valor de la viscosidad de la primera y los de la rigidez, el tiempo de Maxwell y el parámetro de Andrade para el último. Debido a la falta de un modelo mejor, se impone  $\tau_A = \tau_M$ . Para el primer caso, se toma el valor de la viscosidad de la estrella aquél dado por [Veras et al. \(2019\)](#) para el Sol y estrellas similares, el cual es  $\eta_1 = 10^{12}$  Pa s. Para el planeta, dado que se asumió que es de tipo terrestre, se toma entonces el valor de la rigidez correspondiente a la Tierra, es decir  $\mu_2 = 0,8 \times 10^{11}$ . Teniendo en cuenta la Ec. (5.5) y el hecho de que la viscosidad depende fuertemente de la temperatura, de forma tal que aquella decrece cuando la última aumenta, se espera que el tiempo de Maxwell decrezca a medida que la temperatura interna del planeta se incrementa. Al mismo tiempo, se espera que planetas internamente diferenciados con un núcleo parcialmente fundido, como es el caso de la Tierra, tengan asociados valores del parámetro de Andrade en el intervalo  $[0,15; 0,2]$ . Así, debido a esta incertidumbre, se llevaron a cabo varias simulaciones computacionales explorando diferentes valores de  $\tau_M$  y de  $\alpha$ .

En lo que concierne al resto de los parámetros físicos, los valores de la densidad media y gravedad superficial, tanto del planeta como de la estrella, se calcularon usando los datos consignados en la Tabla 5.1. Los valores de los máximos momentos de inercia principales,  $C_1$  y  $C_2$  de la estrella y el planeta, respectivamente, se calcularon como:

$$C_k = \xi_k m_k R_k^2 \quad (5.9)$$

donde  $\xi_k$  se conoce como factor momento de inercia y  $k = 1, 2$ . Para una esfera homogénea su valor es  $2/5$ . Sin embargo, si se considera la estructura interna de los planetas rocosos dicho valor es algo menor. Por ejemplo, [Zeng y Jacobsen \(2017\)](#) mostraron que para la Tierra y planetas similares  $\xi \approx 1/3$ . En consecuencia, se toma  $\xi_1 = 2/5$  y  $\xi_2 = 1/3$ . Los últimos parámetros físicos a ser fijados son el grado de triaxialidad y del factor de forma dinámico, esto es, se requiere el valor de  $(B - A)/C$  y el de  $J_2$ . El

primero puede ser estimado siguiendo el trabajo de [Rodríguez \*et al.\* \(2012\)](#):

$$\frac{B - A}{C} \approx \frac{15}{4} \frac{m_1}{m_2} \left( \frac{R_2}{a} \right)^3. \quad (5.10)$$

Para Kepler-21b se obtiene, aproximadamente,  $7 \times 10^{-4}$ . Sin embargo, a fin de evaluar su impacto en la evolución rotacional del mismo, se consideraron también los valores  $1 \times 10^{-3}$  y cero. Para  $J_2$  se consideraron también tres valores para explorar su influencia:  $1 \times 10^{-3}$  (que es del mismo orden de magnitud que el de la Tierra),  $1 \times 10^{-4}$ ,  $1 \times 10^{-5}$  y cero. Por último, en lo que concierne a los valores iniciales de los elementos orbitales, se tomaron los valores de  $a$  y de  $e$  que se muestran en la Tabla 5.1, dado que se va a centrar la atención en el destino del sistema Kepler-21 y en estimar los tiempos característicos de la evolución dinámica. En este sentido, se va a fijar arbitrariamente  $i_1 = 0,5^\circ$  e  $i_2 = 5^\circ$ . A partir de la Tabla 5.1 se puede calcular la velocidad de rotación de la estrella. Dicho valor se va a tomar como el inicial de  $\dot{\theta}_1$ . Como el estado rotacional del planeta se desconoce totalmente se eligen también de forma arbitraria  $\theta_2(0) = 0$  y  $\dot{\theta}_2(0) = 4,1 n$ . La razón de esta última elección se expondrá más adelante.

## 5.2. Caracterización numérica y semianalítica de la evolución dinámica del sistema Kepler-21

Se llevaron a cabo trece simulaciones numéricas con el objetivo de caracterizar la evolución dinámica del sistema Kepler-21 variando los valores de los parámetros reológicos y dinámicos del planeta dado que, como se indicó antes, son los más inciertos. En dichas simulaciones se integraron numéricamente las Ecs. (2.296) y (2.298) sobre un intervalo de tiempo de  $1 \times 10^5$  años. En la Tabla 5.2 se muestran los valores adoptados en cada una de las integraciones, las cuales están etiquetadas con un número de identificación (ID). Éstas se dividieron en tres conjuntos: el primero consiste en aquellas integraciones donde se variaron solamente los parámetros reológicos del planeta ( $\tau_M$  y  $\alpha$ ); el segundo consiste en las integraciones llevadas a cabo variando los valores de los parámetros dinámicos ( $J_2$  y  $(B - A)/C_2$ ). Por último, el tercero consiste en una sola integración con una excentricidad más alta ( $e = 0,1$ ), valor que se encuentra dentro del intervalo de incerteza ([López-Morales \*et al.\*, 2016](#)), para explorar la posibilidad de captura en resonancias mayores a la 1:1.

A modo de control general, se verificó que en cada una de las simulaciones numéricas se conserva el momento angular total del sistema.

### 5.2.1. Resultados de las simulaciones computacionales

En primer lugar vamos a considerar la evolución rotacional del planeta en el sistema Kepler21. En la Fig. 5.2 se muestran las gráficas de la evolución temporal de la velocidad de rotación normalizada del planeta como resultado del primer (Fig. 5.2a) y segundo (Fig. 5.2b) conjuntos de simulaciones numéricas. Puede verse en la Fig. 5.2a que el tiempo necesario para que el planeta alcance la resonancia 1:1 se ve significativamente afectado por la variación de los parámetros reológicos. En cambio, no ocurre lo mismo cuando se varían los parámetros dinámicos, como puede apreciarse en la Fig. 5.2b.

Es importante señalar que la sincronización no siempre es exacta. Por ejemplo, en las Figs. 5.3a y 5.4a se muestra nuevamente la evolución temporal de la velocidad

**Tabla 5.2:** Valores de los parámetros reológicos y dinámicos adoptados en las integraciones numéricas que se llevaron a cabo en este trabajo. Cada subconjunto de valores de dichos parámetros, dentro de cada conjunto de simulaciones numéricas, se encuentra identificado con un número (ID) a fin de evitar ambigüedades.

Conjunto	ID	$e$	$\tau_M$ [años]	$\alpha$	$(B - A)/C_2$	$J_2$
1	1	0,02	10	0,2	$7 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-3}$
	2	0,02	50	0,2	$7 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-3}$
	3	0,02	100	0,2	$7 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-3}$
	4	0,02	10	0,15	$7 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-3}$
	5	0,02	10	0,3	$7 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-3}$
2	6	0,02	10	0,2	$1 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-3}$
	7	0,02	10	0,2	$1 \times 10^{-5}$	$1 \times 10^{-3}$
	8	0,02	10	0,2	$7 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$
	9	0,02	10	0,2	$7 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-5}$
	10	0,02	10	0,2	0	$1 \times 10^{-3}$
	11	0,02	10	0,2	$7 \times 10^{-4}$	0
	12	0,02	10	0,2	0	0
3	13	0,1	10	0,2	$7 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-3}$

normalizada del planeta, pero en un entorno muy estrecho alrededor de la resonancia 1:1, como resultado de algunas simulaciones numéricas (IDs 1, 6 y 12). En las mismas se puede apreciar que la velocidad de rotación es algo más alta o baja apenas el planeta queda capturado y luego se va acercando paulatinamente al estado de rotación sincrónica, aunque no siempre lo alcanza exactamente.

Después de verificar que  $\dot{M} \approx n$  y que  $n$  no varía apreciablemente debido a la evolución temporal del semieje mayor, se graficaron los valores de  $(\dot{\omega}_2 + \dot{\Omega}_2)/n$  en función del tiempo. Los resultados se muestran en las Figs. 5.3b y 5.4b para el primer y segundo conjunto de integraciones, respectivamente. En la Fig. 5.3b, puede observarse que para el primer conjunto de integraciones numéricas la velocidad de rotación normalizada del planeta es siempre un poco menor que 1. En la Fig. 5.4b, puede notarse que para  $J_2 = 1 \times 10^{-3}$  los resultados son iguales a los antes mencionados y que, para valores menores de  $J_2$  la velocidad de rotación del planeta es mayor que  $n$  apenas el mismo resulta capturado, pero después disminuye hasta hacerse exactamente igual a  $n$ .

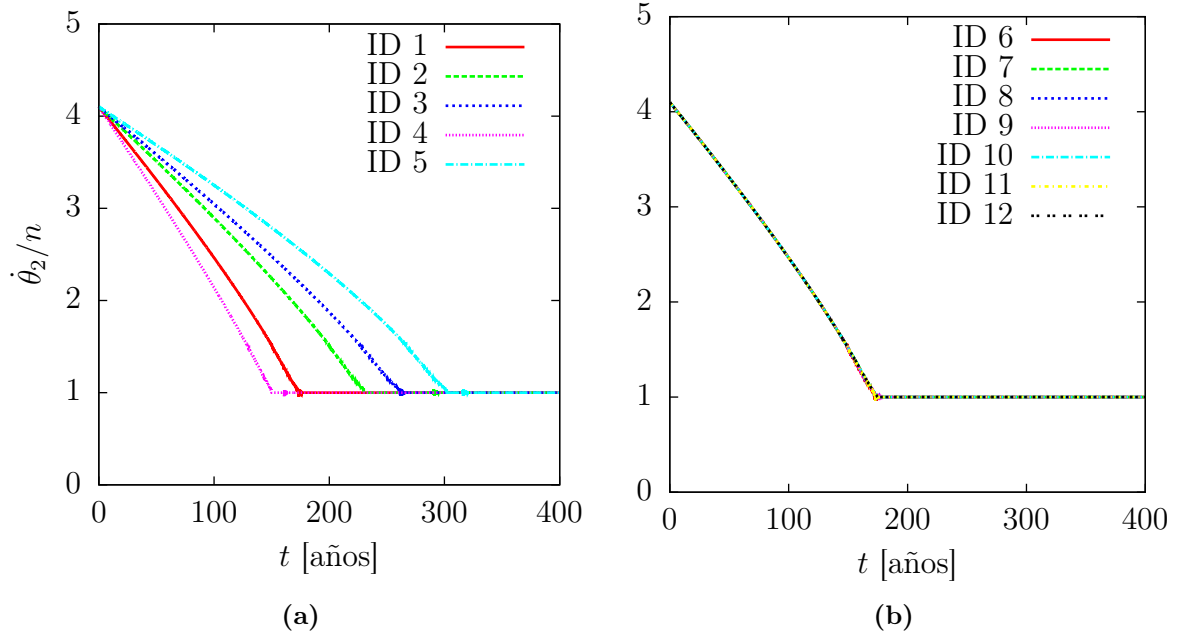
Así, puede observarse la influencia de las velocidades de precesión apsidal y nodal en las frecuencias de mareas. Las mismas fueron calculadas usando la Ec. (2.169) en lugar de utilizar la comúnmente aceptada aproximación:

$$\omega_{lmpq} \approx (l - 2p + q)n - m\dot{\theta},$$

la cual parece ser utilizada casi sin excepciones (Efroimsky, 2012; Makarov, 2012; Makarov *et al.*, 2012; Efroimsky y Makarov, 2013, 2014; Noyelles *et al.*, 2014; Efroimsky, 2015). Por lo tanto, a la luz de estos resultados, es muy importante advertir sobre esta problemática.

El efecto antes descrito también puede observarse en la Fig. 5.5 en donde se muestra la gráfica de la aceleración debida a los términos seculares del torque de mareas en función de la velocidad de rotación normalizada. Estos resultados se obtuvieron





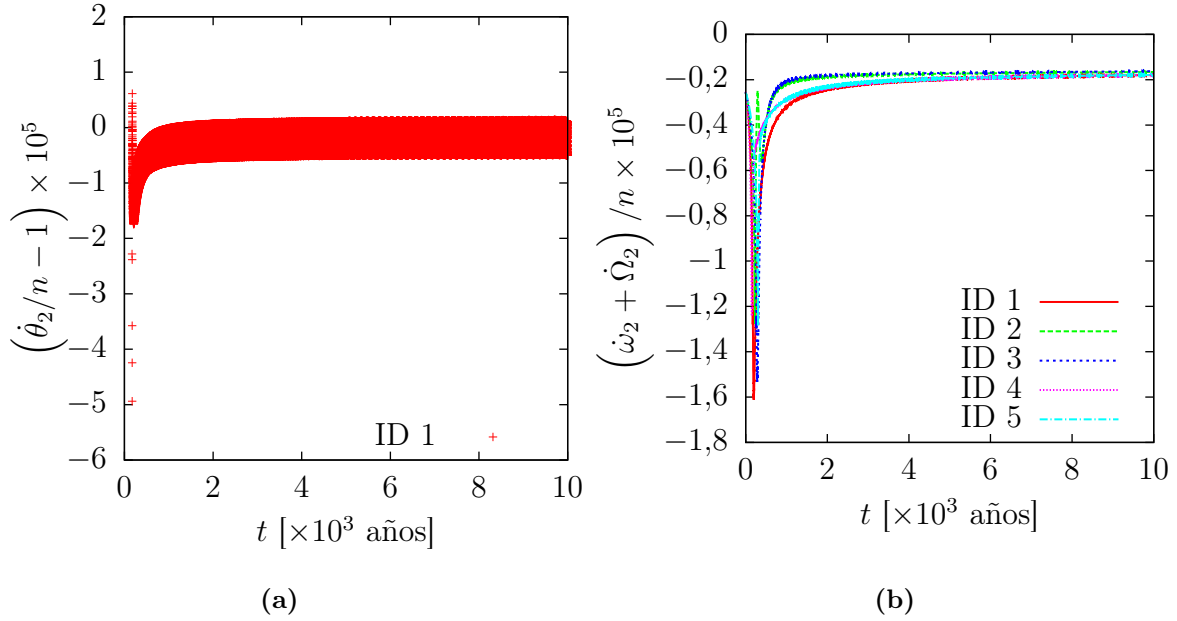
**Figura 5.2:** Evolución temporal de la velocidad de rotación normalizada del planeta obtenida como resultado del primer a) y del segundo (b) conjuntos de experimentos numéricos.

mediante integración numérica (ID 1), que corresponde a los puntos de color verde, y por evaluación directa de la Ec. (4.2), que corresponde a la línea sólida de color rojo. En dicha evaluación, sin embargo, se usó la aproximación  $\omega_{lmpq} \approx (l - 2p + q)n - m\dot{\theta}$ . Si la Fig. 5.5 estuviese animada, entonces se observaría que los puntos de color verde comienzan a acercarse a la línea roja, después de que el planeta resulta capturado en la resonancia 1:1, describiendo el segmento de recta paralelo al de la línea roja cuando pasa por la resonancia exacta. Por supuesto, los puntos obtenidos en las integraciones numéricas correspondientes a los IDs 8, 9, 11 y 12 coincidirían exactamente con la línea roja en el intervalo de tiempo considerado en cada simulación, si éstos estuviesen graficados.

Como se indicó al principio de esta sección, para el tercer conjunto solamente se llevó a cabo una integración con  $e = 0,1$ . Puede verse en la Fig. 5.6, donde se muestra la evolución temporal de  $\dot{\theta}_2/n$ , que el planeta resulta capturado en la resonancia 3:2. Este resultado se encuentra en concordancia con la Fig. 5.7, en la que se muestra nuevamente la aceleración angular debida a los términos seculares del torque de mareas en función de la velocidad de rotación normalizada del planeta para los dos valores considerados de la excentricidad. En dicha figura puede observarse que la línea sólida azul, que es la que corresponde a  $e = 0,1$  cruza el eje horizontal, donde la aceleración angular se anula. Es por este motivo que anteriormente se señaló que la excentricidad juega un papel clave en la posibilidad de captura en resonancias espín-órbita (Makarov, 2012; Noyelles *et al.*, 2014).

Con respecto a esto último, cabe aclarar que si no se considerase el torque triaxial en las simulaciones numéricas, se puede afirmar con toda seguridad que para  $e = 0,02$  el planeta nunca va a quedar capturado en la resonancia 3:2. En cambio, si  $e = 0,1$  entonces el mismo siempre va a resultar capturado en dicha resonancia. Sin embargo, al considerar el torque triaxial, podría ocurrir que el planeta quede capturado en la resonancia 3:2 con  $e = 0,02$  y viceversa, el mismo podría pasar por la misma resonancia





**Figura 5.3:** Evolución temporal de la velocidad de rotación normalizada del planeta en un entorno de la resonancia 1:1 (a) y del valor también normalizado de la suma de las velocidades de precesión apsidal y nodal de la órbita vista desde el planeta (b). Estos resultados corresponden al primer conjunto de integraciones numéricas.

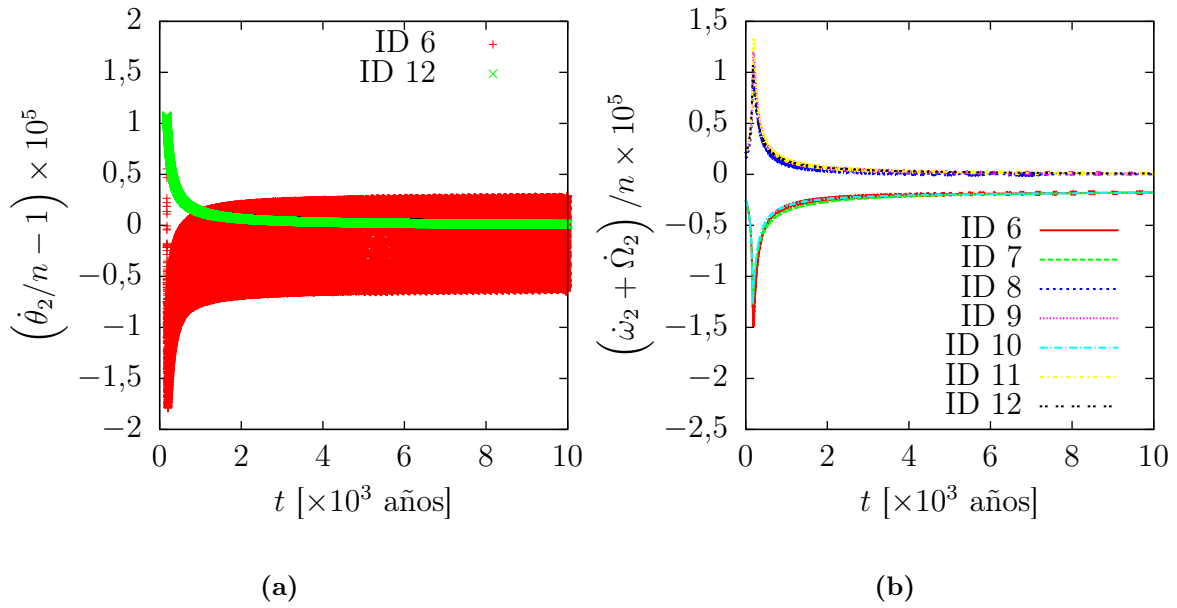
sin resultar capturado para  $e = 0,1$ . Esto último depende fundamentalmente del valor del grado de triaxialidad del planeta  $-(B - A)/C_2$ , entre otros factores (Makarov, 2012).

En la Fig. 5.7 se puede encontrar una justificación del por qué de la elección del valor inicial de la velocidad de rotación ( $\dot{\theta}_2(0) = 4,1n$ ). Como puede verse en dicha figura, la aceleración angular secular debido a la interacción de mareas del planeta es prácticamente constante para  $\dot{\theta}_2/n = 4$ . Por lo tanto, si se considerasen valores iniciales mayores, la única diferencia que se observaría sería que el planeta tarda más en alcanzar el estado final de rotación sincrónica o super sincrónica.

Si se analiza ahora la evolución orbital del sistema Kepler-21, como observación general puede decirse que la variación del semieje mayor y de la excentricidad resultó ser no significativa en las simulaciones implementadas. Lo mismo puede decirse de la evolución temporal de la inclinación de la órbita ( $i_1$ ). Ocurre todo lo contrario con la inclinación de la órbita con respecto al plano del ecuador del planeta; en este caso, la oblicuidad del mismo se ve rápida y significativamente disminuida a valores menores de  $1^\circ$  en todos los casos considerados en las integraciones numéricas.

En las Figs. 5.8a y 5.8b se muestran las gráficas de la evolución temporal del semieje mayor y de la excentricidad, respectivamente, como resultado del primer conjunto de simulaciones numéricas. Por otro lado, en las Figs. 5.9a y 5.9b se muestran las gráficas correspondientes al segundo conjunto de simulaciones computacionales. Las gráficas de la evolución temporal de  $i_2$  correspondiente a los dos conjuntos de simulaciones antes mencionados se muestran en las Figs. 5.10a y 5.10b, respectivamente.

Puede observarse un comportamiento general en las seis figuras antes mencionadas, esto es, los tres parámetros orbitales considerados primero crecen hasta que el planeta llega a la resonancia 1:1 y luego comienzan a decrecer una vez que el mismo resulta

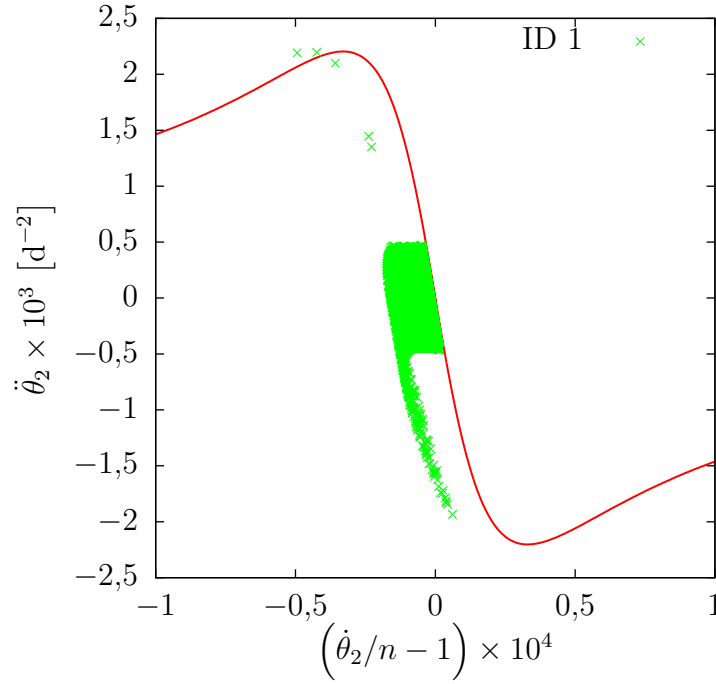


**Figura 5.4:** Evolución temporal de la velocidad de rotación normalizada del planeta en un entorno de la resonancia 1:1 (a) y del valor también normalizado de la suma de las velocidades de precesión apsidal y nodal de la órbita vista desde el planeta (b). Estos resultados corresponden al primer conjunto de integraciones numéricas.

capturado en el estado sincrónico. Debido a que, como puede observarse, las escalas de tiempo de la evolución orbital son mucho mayores que aquella de la evolución rotacional del planeta, resulta útil evaluar las Ecs. (2.296a), (2.296b) (2.296d) en función de la velocidad de rotación normalizada del planeta, de forma análoga a como se hizo con la aceleración angular del mismo debida al torque secular de mareas. El resultado de la evaluación mencionada se muestra en la Fig. 5.11. En la misma puede observarse que, en concordancia con los resultados obtenidos, las derivadas temporales de  $a$ , de  $e$  y de  $i_2$  son positivas para  $\dot{\theta}_2/n > 1$  y negativas para  $\dot{\theta}_2/n < 1$ . En este sentido, la evolución orbital del sistema Kepler-21 puede estimarse sin realizar ninguna integración numérica. Sin embargo, debe advertirse que esto es posible solamente si las escalas de tiempo de la evolución orbital son mucho mayores que las de la evolución rotacional del planeta.

Así como ocurre con el torque mareal secular, el aspecto de las derivadas temporales del semieje mayor, de la excentricidad y de la oblicuidad en función de la velocidad de rotación normalizada reflejan la combinación lineal de las funciones de calidad moduladas por las funciones de la excentricidad y las funciones de la inclinación (y sus derivadas). En otras palabras, tanto el torque de mareas como las ecuaciones que dan la evolución orbital están expresadas sobre la misma “base de funciones”.

Con respecto a la evolución orbital quedan dos observaciones por hacer: la primera es que las diferencias entre los valores finales de las pendientes en la evolución de  $a$  y de  $e$ , y el valor final de  $i_2$ , dependen del valor final (o asintótico) de la velocidad de rotación, en virtud de la discusión precedente. La segunda observación tiene que ver con la evolución temporal de la inclinación de la órbita del planeta ( $i_1$ ). Si bien no se incluyeron las figuras correspondientes, se encontró que en todas las simulaciones computacionales la misma aumentaba linealmente a razón de unos  $9 \times 10^{-9} \text{ }^\circ \text{ año}^{-1}$ . Si bien este resultado



**Figura 5.5:** Aceleración angular del planeta debida a los términos seculares del torque de mareas obtenida mediante la integración numérica correspondiente al ID 1 (puntos verdes) y por evaluación directa de la Eq. (4.2) (línea sólida roja).

puede parecer contradictorio, se debe tener presente que la interacción de mareas puede tanto “apaciguar” como “excitar” la evolución orbital (Veras *et al.*, 2019). Esto mismo se observa en la Fig. 5.11 donde, en ciertas condiciones, los valores de los parámetros orbitales pueden aumentar o disminuir en el tiempo. En el caso de  $i_1$ , puede observarse a partir de las Ecs. 2.295 y (2.296d) que su derivada temporal es positiva siempre que

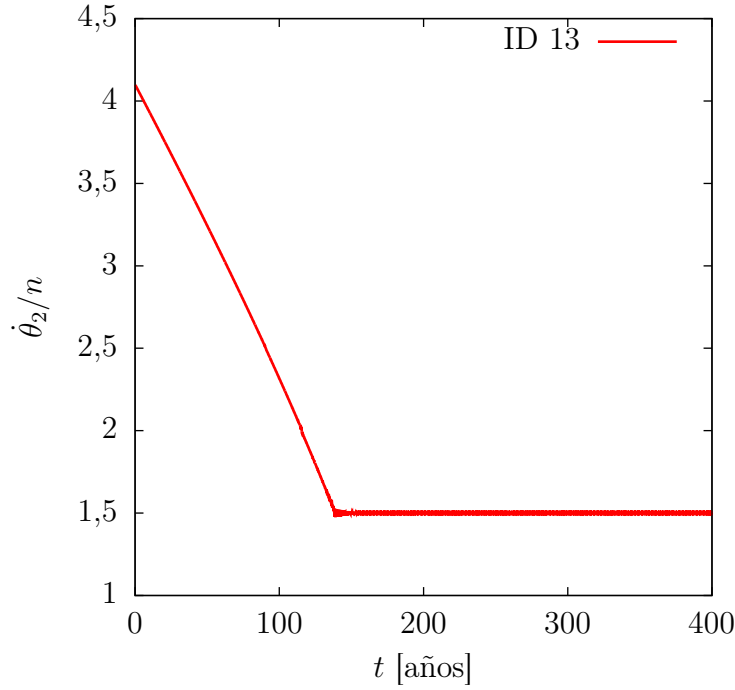
$$\dot{\theta}_1 > \frac{G m_1 m_2}{n a C_1} \xi$$

tal como ocurre en el caso de Kepler-21; por lo que puede afirmarse que esta es una particularidad del sistema considerado.

### 5.2.2. ¿Es posible detectar los efectos de marea?

Por supuesto, sería muy interesante tener la posibilidad de contrastar los resultados obtenidos mediante simulaciones computacionales con datos observacionales, no cabe duda de ello. Dentro de los límites de este trabajo, se puede contestar la pregunta formulada en el título de este apartado solamente de manera parcial. En los últimos años se han logrado enormes avances en las técnicas observacionales que permiten realizar mediciones con gran precisión de los parámetros físicos y orbitales de planetas orbitando otras estrellas. Una de esas cantidades es el periodo orbital, el cual puede ser medido observando varios tránsitos de un planeta por delante de su estrella anfitriona y está definido mediante:

$$P_{\text{orb}} = \frac{2\pi}{n} \quad (5.11)$$



**Figura 5.6:** Evolución temporal de la velocidad de rotación normalizada del planeta como resultado del tercer conjunto de integraciones numéricas (para la cual se tomó  $e = 0,1$ ). Puede observarse que el planeta resultó capturado en la resonancia 3:2.

Si se supone que el sistema evoluciona solamente debido a la interacción de mareas, entonces el periodo orbital también va a evolucionar como consecuencia de la variación temporal del semieje mayor de la órbita. Por lo tanto:

$$\frac{dP_{\text{orb}}}{dt} = -\frac{2\pi}{n^2} \frac{dn}{dt} \quad (5.12)$$

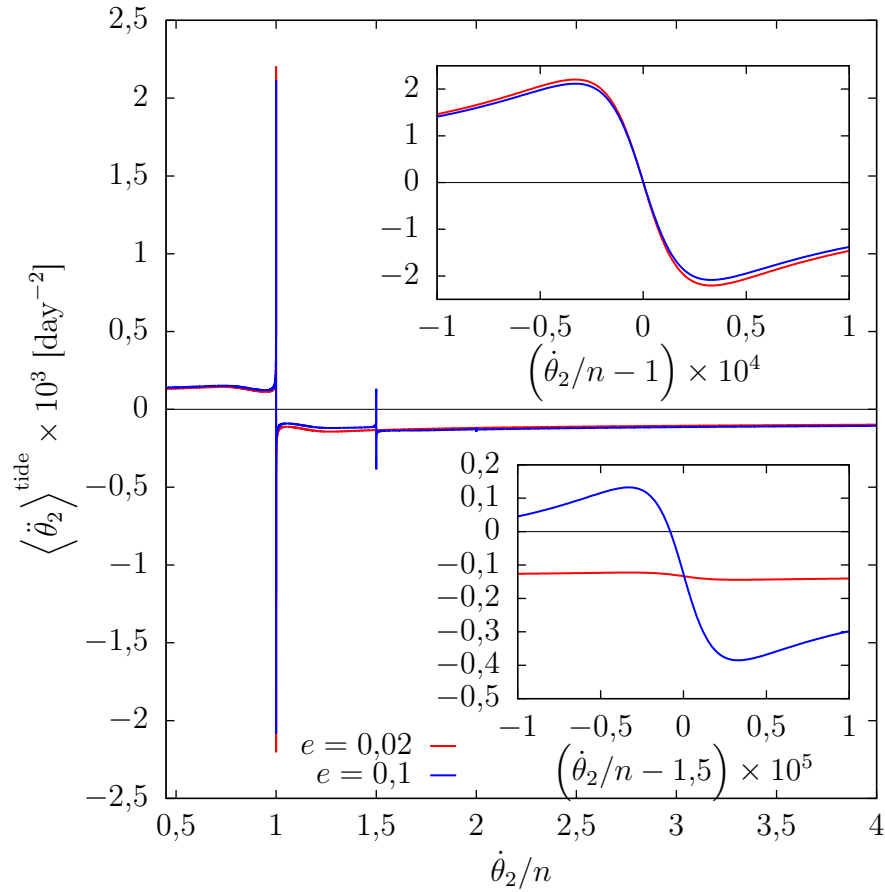
En virtud de las Ecs. (2.109) y (2.110), la Ec. (5.12) puede reescribirse como:

$$\frac{dP_{\text{orb}}}{dt} = \frac{3\pi}{na} \frac{da}{dt}. \quad (5.13)$$

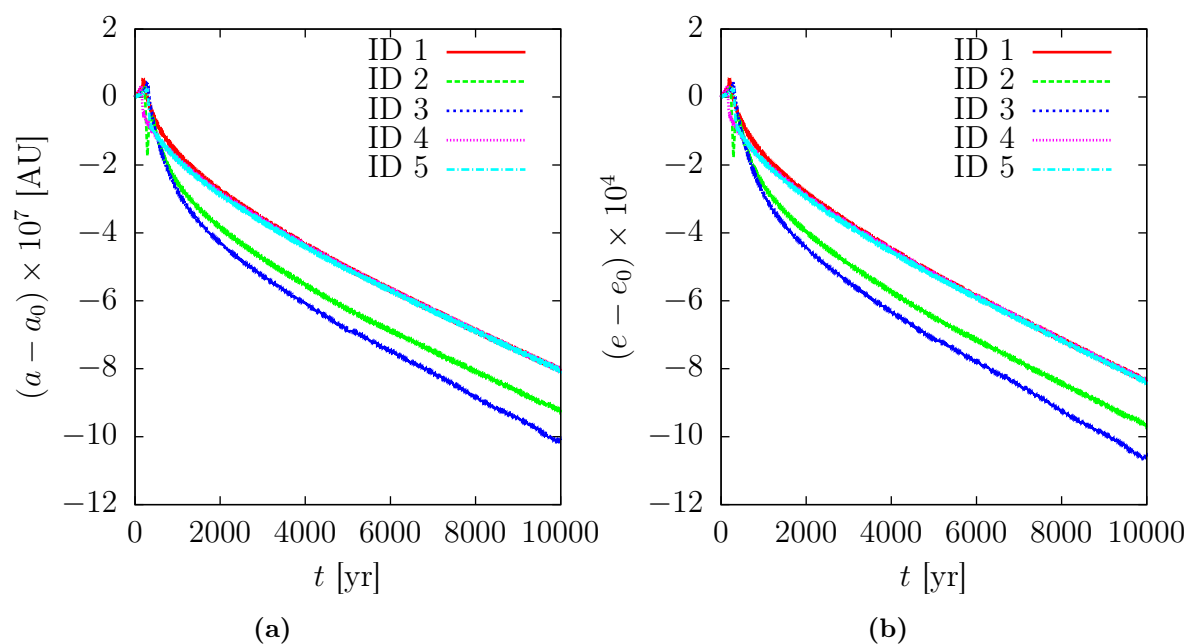
Tomando los valores de los parámetros correspondientes de la Tabla 5.1, se calcula  $n$  y, por otro lado, se estima el valor de la derivada temporal de  $a$  debido solamente a las mareas usando nuevamente la Ec. (2.262a), obteniéndose:

$$\frac{dP_{\text{orb}}}{dt} \approx -0,003879 \frac{\text{s}}{\text{años}},$$

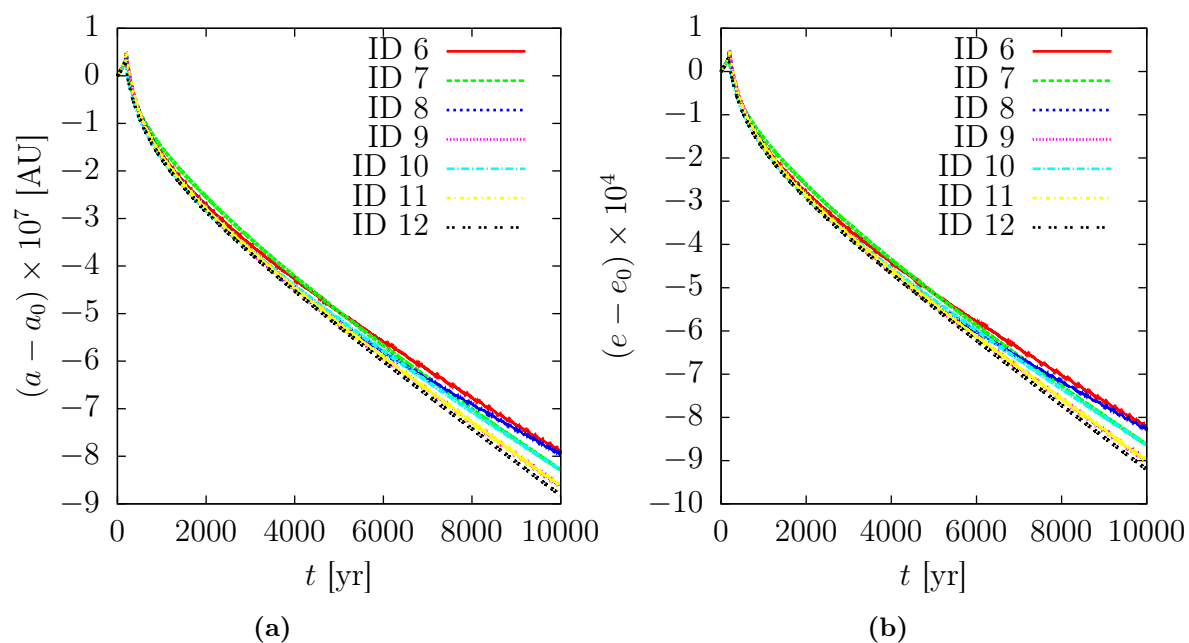
que equivale a unos 3,88 ms por año, con lo cual se necesitarían unos 1000 años para observar una variación de unos 4 segundos. El periodo orbital de Kepler-21b es de 2,78578 días con una incerteza de 0,00003 días (López-Morales *et al.*, 2016), equivalente a unos 2,6 s. Claramente, resulta imposible medir variación alguna del periodo orbital de Kepler-21b, al menos con los instrumentos actualmente disponibles.



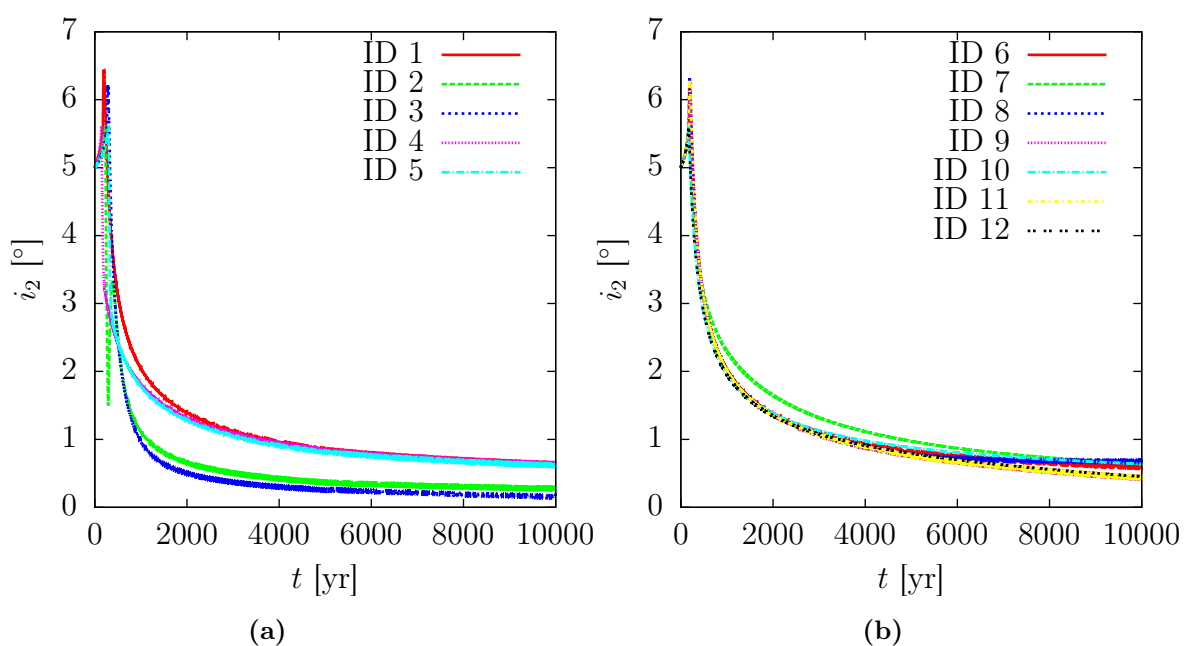
**Figura 5.7:** Aceleración angular del planeta debida a los términos seculares del torque de mareas vs. la velocidad normalizada para dos valores de la excentricidad, el actual ( $e = 0.02$ ) y  $e = 0.1$ . Se han ampliado dos entornos alrededor de las resonancias 1:1 y 3:2 por razones de claridad.



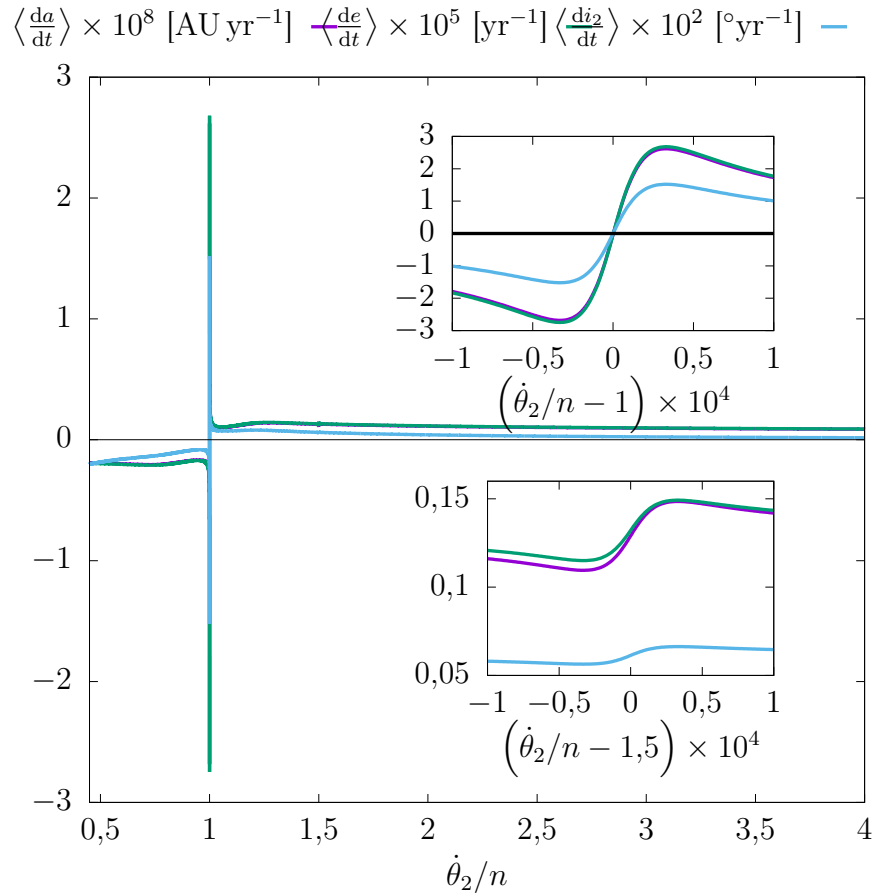
**Figura 5.8:** Evolución temporal de  $a - a_0$  y de  $e - e_0$  (donde  $a_0$  y  $e_0$  son los valores iniciales del semieje mayor de la excentricidad, respectivamente) obtenidas como resultado del primer conjunto de simulaciones numéricas, es decir, aquellas en las que se variaron los valores de los parámetros reológicos del planeta.



**Figura 5.9:** Evolución temporal de  $a - a_0$  y de  $e - e_0$  (donde  $a_0$  y  $e_0$  son los valores iniciales del semieje mayor de la excentricidad, respectivamente) obtenidas como resultado del segundo conjunto de simulaciones numéricas, es decir, aquellas en las que se variaron los valores de los parámetros dinámicos — $J_2$  y  $(B - A)/C_2$ — del planeta.



**Figura 5.10:** Evolución temporal de la inclinación del plano orbital visto desde el planeta (también llamada oblicuidad) obtenidas como resultado del primer (a) y del segundo (b) conjuntos de simulaciones numéricas.



**Figura 5.11:** Derivadas temporales de  $a$ ,  $e$  e  $i_2$  debidas a los términos seculares de los potenciales perturbadores en función de la velocidad de rotación normalizada del planeta. Estas curvas se obtuvieron mediante la evaluación directa de las ecuaciones (2.296a), (2.296b) y (2.296e), respectivamente.



# Capítulo 6

## Discusión final y conclusiones

En este trabajo se han presentado todos los aspectos del formalismo de Darwin-Kaula para el estudio de la evolución dinámica de sistemas planetarios debido a los tres tipos principales de perturbaciones: las mareales, las planetarias y aquellas originadas por una distribución inhomogénea y permanente de masa. Además, se ha presentado uno de los últimos avances en esta temática que brinda un conjunto completo de ecuaciones de movimiento para el estudio de la evolución temporal de un sistema binario. A partir de esto, se logró construir un formalismo que permite estudiar la evolución dinámica de sistemas binarios debido a las mareas que cada uno de ellos induce en el otro, considerando la triaxialidad de uno de ellos, caracterizada por los coeficientes  $J_2$  y  $C_{22}$  de su respectivo campo gravitatorio.

A partir del formalismo desarrollado se obtuvo un conjunto de ecuaciones de movimiento que permite describir la evolución dinámica debida a los términos seculares de los potenciales perturbadores mareales y, también, evaluar la influencia de los términos seculares relacionados a  $J_2$  en la evolución orbital y la de los términos periódicos asociados a  $C_{22}$  en la evolución rotacional, el cual da origen al conocido torque triaxial.

En virtud de que el formalismo construido se basa en el de Darwin-Kaula de la Teoría de Mareas y en desarrollos posteriores realizados principalmente por [Efroimsky \(2012\)](#) y por [Boué y Efroimsky \(2019\)](#), resulta posible incluir cualquier reología lineal a fin de describir la respuesta de los cuerpos celestes ante las fuerzas que los deforman. Todos estos aspectos constituyen los aportes originales de este trabajo de tesis al campo de estudio de sistemas binarios que interactúan gravitacionalmente.

Teniendo en cuenta todo esto, resulta interesante destacar que las ecuaciones de movimiento derivadas por [Boué y Efroimsky \(2019\)](#) a partir del formalismo desarrollado por estos autores fueron implementadas por [Veras \*et al.\* \(2019\)](#) para estudiar la evolución dinámica de dos sistemas binarios conformados por un planeta y una estrella enana blanca cada uno. Sin embargo, en este último trabajo solo se usaron las ecuaciones para el semieje mayor, la excentricidad, las inclinaciones y las aceleraciones angulares. Además, solamente se consideraron los términos seculares del potencial de mareas y se usó el modelo de Maxwell para describir el comportamiento reológico de los planetas. Si bien en este trabajo de tesis no estudiamos este tipo de sistemas, sí nos es posible afirmar, en comparación, que nuestro formalismo incluye al campo de aplicación del formalismo desarrollado por [Boué y Efroimsky \(2019\)](#) y posee aún mayor generalidad al incluir la triaxialidad en uno de los cuerpos —o en los dos, si fuera necesario hacerlo— abarcando diversos tipos de sistemas planetarios.

Es importante mencionar que las ecuaciones de movimiento obtenidas poseen la

característica de ser regulares cuando la excentricidad y las inclinaciones tienden a cero, lo que le confiere gran estabilidad a la expresión computacional del formalismo desarrollado.

El formalismo construido se validó de forma analítica y numérica a través del estudio de la evolución rotacional de Mercurio y de la evolución orbital de sistema Marte-Fobos, recuperando resultados ya obtenidos en la literatura especializada y poniéndolos en discusión.

Luego, las ecuaciones antes mencionadas se implementaron en un modelo computacional y se aplicaron al sistema Kepler-21 que todavía no ha sido estudiado, agregando, por lo tanto, nuevos conocimientos a este campo de estudio. De esta forma, se ha podido caracterizar dicha evolución con respecto a las características más importantes de la interacción de mareas, a saber: la expansión o decaimiento orbital, la circularización, la planarización y la sincronización.

Como conclusiones generales del estudio de la evolución dinámica del sistema Kepler-21 se puede destacar, en primer lugar, que el tiempo de sincronización de la rotación del planeta se ve apreciablemente afectado por la variación de los parámetros reológicos. En segundo lugar, se observó que el efecto combinado de la interacción de mareas y de los términos seculares asociados al coeficiente  $J_2$  puede modificar apreciablemente las frecuencias a las que se excitan los esfuerzos y las deformaciones en el planeta. Sin embargo, cabe mencionar que los estados rotacionales levemente asincrónicos también pueden observarse si se tienen en cuenta las mareas atmosféricas (Correia y Laskar, 2003; Leconte *et al.*, 2015). En tercer lugar, dado que la escala de tiempo de la evolución orbital es mucho mayor que la rotacional, es posible caracterizar completamente la evolución dinámica del sistema Kepler-21 evaluando directamente las ecuaciones que dan las derivadas temporales del semieje mayor, la excentricidad y la inclinación en función de la velocidad de rotación normalizada del planeta. En cuarto lugar, se comprobó la imposibilidad de detectar el efecto de mareas a partir de la influencia que tiene la variación temporal del semieje mayor en el periodo orbital del mismo. Este último aspecto es un tema de investigación reciente que ha motivado la aparición de algunos trabajos al respecto. Por ejemplo, Yee *et al.* (2019) afirman que dicho efecto es detectable en el sistema WASP-12, donde se observan variaciones del periodo orbital que, según ellos, pudieron atribuir a la interacción de mareas. En cambio, Petrucci *et al.* (2019) aseguran que no es posible tal detección para el caso del sistema WASP-19. En este sentido, resultará interesante explorar otros sistemas en los que se pueda medir una variación apreciable del periodo orbital e intentar estimar parámetros reológicos de forma análoga al trabajo de Luna *et al.* (2018a) para el caso del sistema Marte-Fobos. En último lugar, pero no por eso menos importante, cabe mencionar que resulta muy posible que el planeta Kepler-21b se encuentre capturado en la resonancia 1:1, no solamente porque es el estado rotacional más probable, sino porque si estuviese capturado en una resonancia más alta la fricción interna excitada por la interacción de mareas haría que su temperatura interna crezca apreciablemente (Efroimsky y Makarov, 2014; Makarov y Efroimsky, 2014). En consecuencia, la viscosidad del planeta decrecería provocando, a su vez, que disminuya también el tiempo de Maxwell lo cual produce escapes de resonancias altas a otras más bajas en un intervalo de tiempo menor que el descenso de la probabilidad de captura en resonancias mayores a la 1:1 ocasionada por la disminución de la excentricidad debido a la misma interacción de mareas (Makarov *et al.*, 2018).

Lo indicado al final del párrafo anterior abre la posibilidad de investigar la intere-

sante relación que existe entre la evolución dinámica y la evolución térmica de planetas terrestres, temática que se abordará en futuros trabajos.

Otras posibles temáticas a abordar en el corto y mediano plazo son, por un lado, la posibilidad de estudiar, o reestudiar, otros sistemas dentro del Sistema Solar, como por ejemplo los asteroides binarios, dado que el formalismo desarrollado en este trabajo puede ampliarse fácilmente a la consideración de la triaxialidad de ambos cuerpos. Por otro lado, resultará interesante explorar el impacto que tiene en la dinámica la consideración de otras reologías más avanzadas, como la de Sundberg-Cooper ([Sundberg y Cooper, 2010](#); [Renaud y Henning, 2018](#)) y la posibilidad de que la interacción de mareas tenga influencia sobre la tectónica de placas tanto en la Tierra como en otros planetas del Sistema Solar y sistemas extrasolares ([Valencia \*et al.\*, 2007](#); [Valencia y O'Connell, 2009](#); [Valencia \*et al.\*, 2018](#)). Finalmente, más adelante se trabajará la extensión del formalismo aquí construido al problema de  $N$  cuerpos, considerando la disipación debida a la interacción de mareas.

Quizás la particularidad más interesante de esta temática es que aún queda mucho camino por recorrer, en el sentido de que existe una gran cantidad de sistemas en los que es posible aplicar el formalismo aquí presentado. No solamente en el Sistema Solar, sino también en el número cada vez mayor de sistemas extrasolares que se van descubriendo gracias a los enormes avances que se aprecian hoy en día en las técnicas observacionales que, por supuesto, se vuelven cada vez más precisas.

Finalmente, como un derivado de este trabajo de tesis, es importante tener en cuenta que el mismo también se constituye en una herramienta teórica para el desarrollo de próximos estudios y, por lo tanto, para la formación de recursos humanos en este campo de investigación.

## Agradecimientos

Como autor de este trabajo, deseo hacer llegar un especial agradecimiento al Dr. Hugo Navone por brindarme su apoyo incondicional tanto técnico como anímico durante todo el doctorado. También estoy infinitamente agradecido con los Dres. Michael Efroimsky, Dimitri Veras, Gwenaél Boué y Valeri Makarov por las fructíferas, estimulantes e inspiradoras discusiones que hemos mantenido durante este tiempo que, sin duda alguna, han contribuido enormemente a alcanzar el nivel de conocimiento que poseo actualmente acerca de la evolución dinámica debida a la interacción de mareas.

# Bibliografía

- Alexander, M. E. (1973). “The Weak Friction Approximation and Tidal Evolution in Close Binary Systems”. *Astrophysics and Space Science*, Vol. 23(2), págs. 459–510.
- André, Q., Barker, A. J. y Mathis, S. (2017). “Layered semi-convection and tides in giant planet interiors - I. Propagation of internal waves”. *A&A*, Vol. 605, págs. A117.
- André, Q., Mathis, S. y Barker, A. J. (2019). “Layered semi-convection and tides in giant planet interiors - II. Tidal dissipation”. *A&A*, Vol. 626, págs. A82.
- Auclair-Desrotour, P., Leconte, J., Bolmont, E. y Mathis, S. (2019). “Final spin states of eccentric ocean planets”. *A&A*, Vol. 629, págs. A132.
- Barnes, R. (2017). “Tidal locking of habitable exoplanets”. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 129(4), págs. 509–536.
- Beutler, G., Mervart, L. y Verduin, A. (2004). *Methods of Celestial Mechanics: Volume I: Physical, Mathematical, and Numerical Principles*. Astronomy and Astrophysics Library. Springer Berlin Heidelberg.
- Bills, B. G., Neumann, G. A., Smith, D. E. y Zuber, M. T. (2005). “Improved estimate of tidal dissipation within Mars from MOLA observations of the shadow of Phobos”. *Journal of Geophysical Research: Planets*, Vol. 110(E7), págs. n/a–n/a. E07004.
- Biot, M. A. (1954). “Theory of Stress-Strain Relations in Anisotropic Viscoelasticity and Relaxation Phenomena”. *Journal of Applied Physics*, Vol. 25(11), págs. 1385–1391.
- Bolmont, E., Raymond, S. N., Leconte, J., Hersant, F. y Correia, A. C. M. (2015). “Mercury-T: A new code to study tidally evolving multi-planet systems. Applications to Kepler-62”. *A&A*, Vol. 583, págs. A116.
- Borucki, W. J., Koch, D., Basri, G., Batalha, N., Brown, T., Caldwell, D., Caldwell, J., Christensen-Dalsgaard, J., Cochran, W. D., DeVore, E., Dunham, E. W., Dupree, A. K., Gautier, T. N., Geary, J. C., Gilliland, R., Gould, A., Howell, S. B., Jenkins, J. M., Kondo, Y., Latham, D. W., Marcy, G. W., Meibom, S., Kjeldsen, H., Lissauer, J. J., Monet, D. G., Morrison, D., Sasselov, D., Tarter, J., Boss, A., Brownlee, D., Owen, T., Buzasi, D., Charbonneau, D., Doyle, L., Fortney, J., Ford, E. B., Holman, M. J., Seager, S., Steffen, J. H., Welsh, W. F., Rowe, J., Anderson, H., Buchhave, L., Ciardi, D., Walkowicz, L., Sherry, W., Horch, E., Isaacson, H., Everett, M. E., Fischer, D., Torres, G., Johnson, J. A., Endl, M., MacQueen, P., Bryson, S. T., Dotson, J., Haas, M., Kolodziejczak, J., Van Cleve, J., Chandrasekaran, H., Twicken, J. D., Quintana, E. V., Clarke, B. D., Allen, C., Li, J., Wu, H., Tenenbaum, P.,

- Verner, E., Bruhweiler, F., Barnes, J. y Prsa, A. (2010). “Kepler Planet-Detection Mission: Introduction and First Results”. *Science*, Vol. 327(5968), págs. 977–980.
- Boué, G., Correia, A. C. M. y Laskar, J. (2016). “Complete spin and orbital evolution of close-in bodies using a Maxwell viscoelastic rheology”. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 126(1-3), págs. 31–60.
- Boué, G. y Efroimsky, M. (2019). “Tidal evolution of the Keplerian elements”. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 131(7), pág. 30.
- Brouwer, D. y Clemence, G. M. (1961). *Methods of Celestial Mechanics*. Academic Press.
- Castillo-Rogez, J. C., Efroimsky, M. y Lainey, V. (2011). “The tidal history of Iapetus: Spin dynamics in the light of a refined dissipation model”. *Journal of Geophysical Research: Planets*, Vol. 116(E9), págs. n/a–n/a. E09008.
- Correia, A. C. M., Boué, G., Laskar, J. y Rodríguez, A. (2014). “Deformation and tidal evolution of close-in planets and satellites using a Maxwell viscoelastic rheology”. *A&A*, Vol. 571, pág. A50.
- Correia, A. C. M. y Laskar, J. (2003). “Different tidal torques on a planet with a dense atmosphere and consequences to the spin dynamics”. *Journal of Geophysical Research: Planets*, Vol. 108(E11).
- Darwin, G. H. (1879). “On the precession of a viscous spheroid and in the remote history of the Earth”. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Vol. 170, págs. 447–530.
- Darwin, G. H. (1880). “On the Secular Changes in the Elements of the Orbit of a Satellite Revolving about a Tidally Distorted Planet”. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Vol. 171, págs. 713–891.
- Efroimsky, M. (2005a). “Gauge Freedom in Orbital Mechanics”. *Annals of the New York Academy of Sciences*, Vol. 1065(1), págs. 346–374.
- Efroimsky, M. (2005b). “Long-Term Evolution of Orbits About A Precessing Oblate Planet: 1. The Case of Uniform Precession”. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 91(1), págs. 75–108.
- Efroimsky, M. (2012). “Bodily tides near spin-orbit resonances”. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 112, págs. 283–330.
- Efroimsky, M. (2015). “Tidal Evolution of Asteroidal Binaries. Ruled by Viscosity. Ignorant of Rigidity”. *The Astronomical Journal*, Vol. 150(4), pág. 98.
- Efroimsky, M. (2018). “Dissipation in a tidally perturbed body librating in longitude”. *Icarus*, Vol. 306, págs. 328 – 354.
- Efroimsky, M. y Goldreich, P. (2004). “Gauge freedom in the N-body problem of celestial mechanics”. *A&A*, Vol. 415(3), págs. 1187–1199.

- Efroimsky, M. y Lainey, V. (2007). “Physics of bodily tides in terrestrial planets and the appropriate scales of dynamical evolution”. *Journal of Geophysical Research (Planets)*, Vol. 112(11), E12003.
- Efroimsky, M. y Makarov, V. V. (2013). “Tidal friction and tidal lagging. Applicability limitations of a popular formula for the tidal torque”. *The Astrophysical Journal*, Vol. 764(1), pág. 26.
- Efroimsky, M. y Makarov, V. V. (2014). “Tidal dissipation in a homogeneous spherical body. I. Methods”. *The Astrophysical Journal*, Vol. 795(1), pág. 6.
- Efroimsky, M. y Williams, J. G. (2009). “Tidal torques: a critical review of some techniques”. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 104, págs. 257–289.
- Ferraz-Mello, S. (2013). “Tidal synchronization of close-in satellites and exoplanets. A rheophysical approach”. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 116(2), págs. 109–140.
- Ferraz-Mello, S. (2015). “Tidal synchronization of close-in satellites and exoplanets: II. Spin dynamics and extension to Mercury and exoplanet host stars”. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 122(4), págs. 359–389.
- Folonier, H. A. y Ferraz-Mello, S. (2017). “Tidal synchronization of an anelastic multi-layered body: Titan’s synchronous rotation”. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 129(4), págs. 359–396.
- Frouard, J. y Efroimsky, M. (2017). “Tides in a body librating about a spin-orbit resonance: generalisation of the Darwin–Kaula theory”. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 129(1), págs. 177–214.
- Giacaglia, G. E. O. (1976). “A note on Hansen’s coefficients in satellite theory”. *Celestial Mechanics*, Vol. 14, págs. 515–523.
- Goldreich, P. y Peale, S. (1966). “Spin-orbit coupling in the solar system”. *The Astronomical Journal*, Vol. 71, pág. 425.
- Gooding, R. H. y Wagner, C. A. (2008). “On the inclination functions and a rapid stable procedure for their evaluation together with derivatives”. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 101, págs. 247–272.
- Guenel, M., Mathis, S. y Remus, F. (2014). “Unravelling tidal dissipation in gaseous giant planets”. *A&A*, Vol. 566, pág. L9.
- Hughes, S. (1981). “The Computation of Tables of Hansen Coefficients”. *Celestial Mechanics*, Vol. 25, págs. 101–107.
- Karato, S. y Spetzler, H. A. (1990). “Defect microdynamics in minerals and solid state mechanisms of seismic wave attenuation and velocity dispersion in the mantle”. *Reviews of Geophysics*, Vol. 28, págs. 399–421.
- Kaula, W. M. (1961). “Analysis of Gravitational and Geometric Aspects of Geodetic Utilization of Satellites”. *Geophysical Journal*, Vol. 5, págs. 104–133.



- Kaula, W. M. (1964). “Tidal Dissipation by Solid Friction and the Resulting Orbital Evolution”. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, Vol. 2, págs. 661–685.
- Kaula, W. M. (2000). *Theory of Satellite Geodesy: Applications of Satellites to Geodesy*. Dover Earth Science Series. Dover Publications.
- Kopeikin, S., Efroimsky, M. y Kaplan, G. (2011). *Relativistic Celestial Mechanics of the Solar System*. Wiley-VCH.
- Kopparapu, R. K., Ramirez, R., Kasting, J. F., Eymet, V., Robinson, T. D., Mahadevan, S., Terrien, R. C., Domagal-Goldman, S., Meadows, V. y Deshpande, R. (2013a). “ERRATUM: “HABITABLE ZONES AROUND MAIN-SEQUENCE STARS: NEW ESTIMATES” (2013, ApJ, 765, 131)”. *The Astrophysical Journal*, Vol. 770(1), pág. 82.
- Kopparapu, R. K., Ramirez, R., Kasting, J. F., Eymet, V., Robinson, T. D., Mahadevan, S., Terrien, R. C., Domagal-Goldman, S., Meadows, V. y Deshpande, R. (2013b). “HABITABLE ZONES AROUND MAIN-SEQUENCE STARS: NEW ESTIMATES”. *The Astrophysical Journal*, Vol. 765(2), pág. 131.
- Kozai, Y. (1959). “The motion of a close earth satellite”. *The Astronomical Journal*, Vol. 64, pág. 367.
- Leconte, J., Wu, H., Menou, K. y Murray, N. (2015). “Asynchronous rotation of Earth-mass planets in the habitable zone of lower-mass stars”. *Science*, Vol. 347(6222), págs. 632–635.
- López-Morales, M., Haywood, R. D., Coughlin, J. L., Zeng, L., Buchhave, L. A., Giles, H. A. C., Affer, L., Bonomo, A. S., Charbonneau, D., Cameron, A. C., Consentino, R., Dressing, C. D., Dumusque, X., Figueira, P., Fiorenzano, A. F. M., Harutyunyan, A., Johnson, J. A., Latham, D. W., Lopez, E. D., Lovis, C., Malavolta, L., Mayor, M., Micela, G., Molinari, E., Mortier, A., Motalebi, F., Nascimbeni, V., Pepe, F., Phillips, D. F., Piotto, G., Pollacco, D., Queloz, D., Rice, K., Sasselov, D., Segransan, D., Sozzetti, A., Udry, S., Vanderburg, A. y Watson, C. (2016). “KEPLER-21b: A ROCKY PLANET AROUND AV= 8.25 mag STAR”. *The Astronomical Journal*, Vol. 152(6), pág. 204.
- Luna, S., Melita, M. y Navone, H. (2019). “Dynamical evolution of close-in super-earths tidally interacting with its host star near spin-orbit resonances. The case of Kepler-21 system”. *arXiv e-prints*, arXiv:1907.10575.
- Luna, S. H., Melita, M. D. y Navone, H. D. (2016). “Estudio de la interacción de mareas en sistemas exoplanetarios observados: Estimación de las probabilidades de captura en resonancias espín-órbita”. *Boletín de la Asociación Argentina de Astronomía*, Vol. 58, págs. 310–312.
- Luna, S. H., Melita, M. D. y Navone, H. D. (2018a). “Estudio de la evolución orbital de Fobos debido a la interacción de mareas y su relación con la propiedades físicas de Marte”. *Boletín de la Asociación Argentina de Astronomía*, Vol. 60, págs. 265–267.
- Luna, S. H., Melita, M. D. y Navone, H. D. (2018b). “Origen y evolución orbital de Fobos: Exploración de una hipótesis de captura”. *Boletín de la Asociación Argentina de Astronomía*, Vol. 60, págs. 268–270.

- MacDonald, G. J. F. (1964). “Tidal friction”. *Reviews of Geophysics*, Vol. 2(3), págs. 467–541.
- Makarov, V. V. (2012). “Conditions of Passage and Entrapment of Terrestrial Planets in Spin-Orbit Resonances”. *The Astrophysical Journal*, Vol. 752(1), pág. 73.
- Makarov, V. V., Berghea, C. y Efroimsky, M. (2012). “Dynamical Evolution and Spin-Orbit Resonances of Potentially Habitable Exoplanets: The Case of GJ 581d”. *The Astrophysical Journal*, Vol. 761(2), pág. 83.
- Makarov, V. V., Berghea, C. T. y Efroimsky, M. (2018). “Spin-orbital Tidal Dynamics and Tidal Heating in the TRAPPIST-1 Multiplanet System”. *The Astrophysical Journal*, Vol. 857(2), 142.
- Makarov, V. V. y Efroimsky, M. (2014). “Tidal Dissipation in a Homogeneous Spherical Body. II. Three Examples: Mercury, IO, and Kepler-10 b”. *Astrophysical Journal*, Vol. 795(1), 7.
- Marques, S. P. C. y Creus, G. J. (2012). *Computational viscoelasticity*. Springer.
- Mathis, S. y Le Poncin-Lafitte, C. (2009). “Tidal dynamics of extended bodies in planetary systems and multiple stars”. *A&A*, Vol. 497(3), págs. 889–910.
- Mignard, F. (1979). “The evolution of the lunar orbit revisited. I”. *Moon and Planets*, Vol. 20, págs. 301–315.
- Mignard, F. (1980). “The evolution of the lunar orbit revisited. II”. *Moon and Planets*, Vol. 23, págs. 185–201.
- Murray, C. D. y Dermott, S. F. (1999). *Solar system dynamics*. Cambridge University Press.
- Noyelles, B., Frouard, J., Makarov, V. V. y Efroimsky, M. (2014). “Spin-orbit evolution of Mercury revisited”. *Icarus*, Vol. 241, págs. 26 – 44.
- Petrucchi, R., Jofré, E., Gómez, Y., Hinse, T. C., Masek, M., Tan, T. G. y Gómez, M. (2019). “Discarding orbital decay in WASP-19b after one decade of transit observations”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 491(1), págs. 1243–1259.
- Pettengill, G. H. y Dyce, R. B. (1965). “A Radar Determination of the Rotation of the Planet Mercury”. *Nature*, Vol. 206, pág. 1240.
- Proulx, R. J. y McClain, W. D. (1988). “Series representations and rational approximations for Hansen coefficients”. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 11(4), págs. 313–319.
- Remus, F., Mathis, S. y Zahn, J.-P. (2012a). “The equilibrium tide in stars and giant planets - I. The coplanar case”. *A&A*, Vol. 544, pág. A132.
- Remus, F., Mathis, S., Zahn, J.-P. y Lainey, V. (2012b). “Anelastic tidal dissipation in multi-layer planets”. *A&A*, Vol. 541, pág. A165.



- Remus, F., Mathis, S., Zahn, J.-P. y Lainey, V. (2015). “The surface signature of the tidal dissipation of the core in a two-layer planet”. *A&A*, Vol. 573, pág. A23.
- Renaud, J. P. y Henning, W. G. (2018). “Increased Tidal Dissipation Using Advanced Rheological Models: Implications for Io and Tidally Active Exoplanets”. *The Astrophysical Journal*, Vol. 857(2), pág. 98.
- Rodríguez, A., Callegari, J., N., Michtchenko, T. A. y Hussmann, H. (2012). “Spin–orbit coupling for tidally evolving super-Earths”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 427(3), págs. 2239–2250.
- Singer, S. F. (1968). “The Origin of the Moon and Geophysical Consequences”. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, Vol. 15(1-2), págs. 205–226.
- Sundberg, M. y Cooper, R. F. (2010). “A composite viscoelastic model for incorporating grain boundary sliding and transient diffusion creep; correlating creep and attenuation responses for materials with a fine grain size”. *Philosophical Magazine*, Vol. 90(20), págs. 2817–2840.
- Valencia, D. y O’Connell, R. J. (2009). “Convection scaling and subduction on Earth and super-Earths”. *Earth and Planetary Science Letters*, Vol. 286(3), págs. 492 – 502.
- Valencia, D., O’Connell, R. J. y Sasselov, D. (2006). “Internal structure of massive terrestrial planets”. *Icarus*, Vol. 181(2), págs. 545–554.
- Valencia, D., O’Connell, R. J. y Sasselov, D. D. (2007). “Inevitability of Plate Tectonics on Super-Earths”. *The Astrophysical Journal*, Vol. 670(1), págs. L45–L48.
- Valencia, D., Sasselov, D. D. y O’Connell, R. J. (2007a). “Detailed Models of Super-Earths: How Well Can We Infer Bulk Properties?” *The Astrophysical Journal*, Vol. 665(2), págs. 1413–1420.
- Valencia, D., Sasselov, D. D. y O’Connell, R. J. (2007b). “Radius and Structure Models of the First Super-Earth Planet”. *The Astrophysical Journal*, Vol. 656(1), págs. 545–551.
- Valencia, D., Tan, V. Y. Y. y Zajac, Z. (2018). “Habitability from Tidally Induced Tectonics”. *The Astrophysical Journal*, Vol. 857(2), pág. 106.
- Veras, D., Efroimsky, M., Makarov, V. V., Boué, G., Wolthoff, V., Reffert, S., Quirrenbach, A., Tremblay, P.-E. y Gänsicke, B. T. (2019). “Orbital relaxation and excitation of planets tidally interacting with white dwarfs”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 486(3), págs. 3831–3848.
- Yee, S. W., Winn, J. N., Knutson, H. A., Patra, K. C., Vissapragada, S., Zhang, M. M., Holman, M. J., Shporer, A. y Wright, J. T. (2019). “The Orbit of WASP-12b Is Decaying”. *The Astrophysical Journal*, Vol. 888(1), pág. L5.
- Zeng, L. y Jacobsen, S. B. (2017). “A Simple Analytical Model for Rocky Planet Interiors”. *The Astrophysical Journal*, Vol. 837(2), pág. 164.

- Zoppetti, F. A., Beaugé, C., Leiva, A. M. y Folonier, H. (2019). “A self-consistent weak friction model for the tidal evolution of circumbinary planets”. *A&A*, Vol. 627, pág. A109.
- Zoppetti, F. A., Leiva, A. M. y Beaugé, C. (2020). “Tidal evolution of circumbinary systems with arbitrary eccentricities: applications for Kepler systems”. *A&A*, Vol. 634, pág. A12.